



TITLE:

# 開水路彎曲流に関する研究( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

村本, 嘉雄

---

CITATION:

村本, 嘉雄. 開水路彎曲流に関する研究. 京都大学, 1966, 工学博士

ISSUE DATE:

1966-11-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k644>

RIGHT:

# 開水路彎曲流に関する研究

村 本 嘉 雄

昭和41年3月



# 開水路弯曲流に関する研究

村 本 嘉 雄

昭和 4 1 年 3 月





# 開水路彎曲流に関する研究

## 目 次

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 緒 論                     | 1  |
| 第 1 章 開水路彎曲流の実験的研究      | 7  |
| 第 1 節 概 説               | 7  |
| 第 2 節 90°彎曲水路における実験     | 8  |
| (1) 実験内容                | 8  |
| (2) 横断水面形               | 13 |
| (3) エネルギー線と断面平均水面形      | 19 |
| (4) 運動量およびエネルギー補正係数     | 25 |
| 第 3 節 180°彎曲水路における実験    | 37 |
| (1) 実験内容                | 37 |
| (2) 球形ピトー管の特性と測定精度      | 39 |
| (3) 水面形                 | 44 |
| (4) 流速分布                | 46 |
| 第 4 節 結 言               | 59 |
| 第 2 章 開水路彎曲流の渦度の特性と領域区分 | 63 |
| 第 1 節 概 説               | 63 |
| 第 2 節 渦度分布の検討と領域区分      | 64 |
| (1) 渦度分布の検討             | 64 |
| (2) 領域区分                | 67 |
| 第 3 節 領域区分の検討           | 69 |
| 第 4 節 結 言               | 74 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第3章 二次流の発生域に関する考察      | 75  |
| 第1節 概 説                | 75  |
| 第2節 発生域における二次流の流速分布    | 77  |
| (1) 渦度保存則にもとづく考察       | 77  |
| (2) 実験値との比較            | 80  |
| 第3節 発生域の限界に関する二、三の考察   | 82  |
| (1) 底面摩擦の影響と発生域の限界     | 82  |
| (2) 発生域の限界における二次流の流速分布 | 88  |
| (3) 実験値との比較            | 90  |
| 第4節 結 言                | 94  |
| 第4章 二次流の完全発達域に関する考察    | 97  |
| 第1節 概 説                | 97  |
| 第2節 上層，下層の流れの基礎式       | 100 |
| 第3節 上層部に関する考察          | 104 |
| (1) 上層部の流れの解析          | 104 |
| (2) 自由渦理論との比較          | 111 |
| (3) 流速分布式の検討と計算例       | 113 |
| (4) 水面形の式の検討と計算例       | 117 |
| (5) 側壁近くの補正            | 120 |
| (6) 実験値との比較            | 122 |
| 第4節 下層部に関する考察          | 128 |
| (1) 下層部の流れの解析 (Ⅰ)      | 129 |
| (2) 下層部の流れの解析 (Ⅱ)      | 131 |
| 第5節 結 言                | 134 |
| 結 論                    | 138 |

# 開水路彎曲流に関する研究

## 緒 論

一般に、自然河川は、時間的、空間的に平均化してみれば、過去から未来へ、上流から下流へ平衡化、一様化していく一方向系と考えることができる。しかしながら、われわれの生活の場は、平均化のスケールに比して極めて限定されているので、こうした大局的な河川の変化と同時に局所的な変化に依存し、支配されることが多いと言えよう。

河川の蛇行の発達およびその要素としての河道彎曲部における局所洗掘などの現象は、このような側面をもつ典型的な問題と考えられる。しかも、彎曲部における流砂、水流の水理特性が十分に把握されていないために、彎曲部は災害を惹起する河道の弱点となることが多く、河川の維持あるいは水工構造物の建造に際して常に問題視されている。

一方、灌漑用水路、発電用水路などの人工水路においても、全長にわたって曲線水路とする場合、あるいは局所的に彎曲部を挿入する場合が多くみらる。こうした水路の設計に際して、彎曲流の水面形の特性を明らかにすることはもちろん重要であるが、さらに、取水路における泥砂の排除、下水道用水路における汚水の攪拌といった彎曲流の積極的な利用のために、彎曲流の内部における水理特性の解明が要望されている。

このように開水路彎曲流の諸現象はわれわれにとって極めて身近かな存在であって、その影響を受けることも多いため、古くから現象の観察が行なわれ、多種多様な観点から考察がなされてきた。すなわち、河道の蛇行に関す

る自然地理学的研究から開水路彎曲流に関する水理学的研究にいたるまで多くの分野にわたっての研究成果が想起される。

こうした多面的な研究方向の中であって、開水路彎曲流に関する水理学的研究は自然河川における複合的な現象を単純化し、流れの基本特性を把握することによって、現象の予測および積極的利用を意図しているものと言えよう。しかし、最も単純化された固定床の単一彎曲水路の流れにおいても、現象に関係する要素が多いために、支配的な要素も十分に把握されていなく、定量的に取り扱える現象は極く限られている。つぎに、固定床の彎曲水路における水理特性について概述し、実用的問題との関連および研究上の問題点を明らかにしてみよう。

#### (1) 開水路彎曲流の水理特性

一様な直線水路の流れに対して、彎曲水路の流れにみられる特徴的な現象を水面形、流速分布の特性に分けて述べるとつぎのようである。

(i) 水面形：一般に彎曲部付近の流れは遠心力の作用によって水路の横断方向に水面こう配を生じ、主流方向にも局所的に水位上昇部が現われる。特に、射流状態では水面に交叉波を生じ、彎曲部の内、外岸の水位差も著るしく増大する。

こうした水面形の特性は河川の堤防高、法線あるいは人工水路の断面を決定する際に問題となる主要な現象であろう。しかし、射流状態の交叉波に対する理論以外には、二次元水面形に対する一般的な取り扱いはなされていなく、主に内、外岸の最大水位差、エネルギー損失水頭などの代表量あるいは平均量の算定が行なわれている。

最大水位差の算定は横断水面こう配と主流流速による遠心力との均衡を考え、

主流流速に自由渦，強制渦，一様流速あるいは放物線分布などの仮定を導入した各種の公式にもとづいている場合が多い。しかし，一様流速の仮定以外，これらの水位差の式には未知定数が含まれており，それを決めるために他の仮定を必要とし，適用範囲を明確にした式は得られていないと言えよう。

一方，エネルギー損失水頭の算定は損失係数の実測値が極めて少く，彎曲部の影響範囲および，下流端の条件の影響など算定の基準に対する検討もほとんどなされていないのが現状である。

(ii) 流速分布の特性： 彎曲部における流れの流線はらせん形状をなし，流速分布は主流成分と断面内の二次流成分に分けて取り扱われている。二次流は一般に，水面近くで外岸，底面近くで内岸への流向をもち，主流の最大流速を外岸へ偏らせる主因となる。

こうした彎曲部の流速特性は自然河川における蛇行の発達および彎曲部の局所洗掘の増加と密接に関係しており，通常好ましくない現象と考えられている。しかしながら，前述の汚水の攪拌，泥砂の排除のように，二次流による拡散効果の増加，あるいは底層での固有な流れの有効な利用も考えられよう。

このような実際的問題を裏づけるには，彎曲流における内部機構の一般的特性を明らかにする必要があるが，これまでの研究では，主流方向に変化のない一様な彎曲流における主流，二次流の流速分布が記述されているにすぎない。しかも，主流については上述の自由渦の流速分布あるいは指数分布が適用されており，定数を実験的に検討している段階にあると言えよう。一方，二次流については，現象の測定が充分でなく，特に鉛直方向の速度成分，壁面近くの流れに対する計測手法の開発が必要と考えられる。

また、移動床の問題に関連して、主流の流速測定より路床のせん断応力を求める試みもなされているが、彎曲流の流速分布則が明らかでないために、定量的には問題があり、二次流の評価が充分になされていないと言えよう。

以上、(i)、(ii)に述べた現象の他に、曲率の大きい彎曲部では、内岸および外岸にはく離を生じ、水面形、流速分布の特性に影響を与える。しかし、はく離状態における現象観察は極く限られており、エネルギー損失およびはく離点の位置について若干実験的検討が加えられているにすぎない。

## (2) 本研究の目的と内容

開水路彎曲流における特徴的な現象は、上述のように、定性的にはかなり明らかになっている。しかし、比較的計測の容易な水面形についても、現象を予測する段階にはほど遠く、特に、彎曲流の内部における運動機構は極めて感性的に描写されている状態と言えよう。また、これまでなされている研究の方向は極めて離散的であって、系統的な現象把握がなされていないように思う。

こうした現状を打開し、実用的な諸問題に対処するには、彎曲流に関する支配的な要素を明確にするための広範な実験的研究と同時に、現象を記述する方法論を確立する必要がある。

以上の観点から、本研究では、特に彎曲流の内部における運動機構を統一的に把握し、現象解析の方向を明確にすることを主目的とし、詳細な実験的研究を行なうとともに、彎曲流の遷移過程を明確にしたモデルにもとづいて理論の展開および検証を行なうつもりである。つぎに、各章の内容を述べよう。

第1章においては、彎曲流における水面形、流速分布の特性を把握するために $90^{\circ}$ 、 $180^{\circ}$ 彎曲水路を用いて実験的研究を行なう。まず、横断面水面形、断面平均エネルギーの特性について従来の研究成果と比較検討するとともに、問題点を明らかにする。流速分布の特性については、エネルギーおよび運動量補正係数を直線流のそれと比較検討し、主流、二次流の流速分布および、局所的エネルギーの分布の特徴を指摘する。また、二次流の計測に使用する球型ピトー管の特性を詳細に吟味し、改良を加えるとともにその測定精度についても述べるつもりである。

第2章においては、彎曲流の内部における力学的機構を統一的に把握するために、第1章で得られた各流速成分を断面スケールの渦度に変換し、その分布特性を検討する。その結果を単純化することによって、彎曲部における流れの遷移過程を二次流の発生域、発達域、完全発達域の三領域に区分するとともに解析の方向を明らかにする。また、境界条件および水理条件の異なる若干の実験値より領域区分を吟味し、彎曲流に関係する支配的要素の検討を行なうつもりである。

第3章においては、第2章で位置づけられた二次流の発生域に関して、特に、二次流の発生、発達過程および発生域の限界を考察し、実験値との比較検討を行なう。まず、翼列内の二次流に関するSquire, Winterの理論の適用性を検討するために、渦度保存則より二次流の流速分布式を誘導し実験値と比較する。さらに、底面摩擦の影響の入る場合について考察を試み、発生域の限界および、発生域の限界における二次流の分布式を導き、その妥当性について検討するつもりである。

第4章においては、二次流の完全発達域について考察を行なうが、この領域に対しては曲管、開水路を通じて従来よりかなり多くの解析がなされ



ているので、まず、その方向を層流理論と三次元境界層理論に分けて解析上の問題点を指摘する。つぎに、境界層理論に準拠し、特に、従来の解析で仮定として与えられている上層部の流れについて詳細に考察し、水面形、流速分布の特性に対する彎曲部の曲率の影響を一般的に論ずるとともに計算例を示す。また、自由渦理論と比較して二次流の効果を明らかにするとともに、実験値と比較し、この領域として近似できる範囲を検討する。下層部の流れに関しては、上、下層の境界面および条件式の選定について吟味したのち、上、下層の連続の関係にもとづく解析法と運動量式および連続の関係を連立させた解析法について述べるつもりである。

# 第 1 章 開水路彎曲流の実験的研究<sup>13 14</sup>

## 第 1 節 概 説

開水路彎曲流の研究は、緒論で述べたように、河川の蛇行に関する自然地理学的研究を止揚する意図から進められてきたと考えられるが、室内実験による本格的な研究は、1940年代からはじまり、近年、その展開期にあると言えよう。

従来においてなされた主な実験的研究の総括は I.L.Rozovski<sup>1)</sup> Ben - Chie - Yen<sup>2)</sup> の論文で示されている。これらにわが国で行なわれた最近の研究を加え、著者の入手した範囲で示すと、表-1・1・1 のようになる。

表にみられるように、流れの状態としては、乱流-常流状態で、はく離を生じていない場合が多く、その研究対象はつぎのように大別できよう。

- (i) 水面形（主に横断水面形）
- (ii) 二次流の特性
- (iii) 主流の流速特性
- (iv) エネルギー損失および路床のせん断応力
- (v) 乱れ

以上の項目は、それぞれ独立に論ずることはできないが、彎曲流を統一的に考察する方法論が確立していないので、“直線流との対比”あるいは“完全流体の彎曲流との対比”という観点から個々に検討されている場合が多いようである。

本章では、第 1 節で、90°彎曲水路で曲率半径を 4 種類変えた実験を行ない、主に、横断水面形、エネルギー線の特性について、従来の研究と比較検討し、その問題点を明らかにする。また、主流、二次流の流速特性については、運動量およびエネルギー補正係数に対する影響として把え、従来考慮さ

れていない新たな補正係数を導入し、詳細な検討を行なう。

第2節では、特に、主流、二次流の流速特性を検討するために、偏角の大きい $180^\circ$ 彎曲水路を用いて曲率半径を二種類に変えた実験を行ない、流速三成分の特性およびエネルギーの移行過程について詳細に述べる。

また、三次元の流向測定に使用されている球型ピート管の特性について検討し、自由表面の影響を除くように改良するとともに、その測定精度について吟味する。

## 第2節 $90^\circ$ 彎曲水路における実験

### (1) 実験内容

この実験は京都大学工学研究所で行なったもので、実験装置の概要はつぎのとおりである。

#### (i) 実験水路

実験に用いた水路は水路巾 $25\text{ cm}$ 、深さ $35\text{ cm}$ の長方形断面水路で、内面が透明な塩化ビニール板（粗度係数 $n=0.00986$ ）からなり、外側は鋼製フレームで補剛されている。その平面形状は図-1・2・1に示すように、上流、下流側それぞれ $10\text{ m}$ 、 $4\text{ m}$ の直線部の間に彎曲偏角 $90^\circ$ の同心円状の単一彎曲部が挿入される。彎曲部は中心曲率半径 $25\text{ cm}$ 、 $50\text{ cm}$ 、 $75\text{ cm}$ 、 $100\text{ cm}$ の4種類であって、中心曲率半径と水路巾の比はそれぞれ1、2、3、4になっている。各彎曲部は、両端に $25\text{ cm}$ の直線区間を有し、彎曲部接合時には上流、下流直線部はそれぞれ $10.25\text{ m}$ 、 $4.25\text{ m}$ の長さになる。

路床こう配は常流状態の実験時には $1/500$ 、射流状態の実験時には $1/143$ に設定している。

表一

| 研究者                                | 実験水路<br>材料および<br>断面形状                              | $r$            | $Re$<br>$10^4$     | 研究対象                                |
|------------------------------------|--|----------------|--------------------|-------------------------------------|
| Mockmore <sup>3)</sup>             | ルーサイト 長方   | ~0.15          | 1.3~1.7            | (主流の流速分布<br>水面形                     |
| Shukry <sup>4)</sup>               | ペイント 長方  | ~0.8           | 1.0~7.8            | (主流, 二次流の流速分<br>布, 水面形, 損失係数        |
| Einstein &<br>Harder <sup>5)</sup> | コンクリートと<br>メタル粗面 長方                                | ~0.4           | 0.5~1.3            | (主流の流速分布<br>抵抗係数                    |
| Ippen &<br>Drinker <sup>6)</sup>   | プラスチック<br>$n=0.010$<br>と粗面<br>0.017 (法こう配<br>2%) 台 | ~0.55<br>~0.51 | 2.4~7.5<br>1.1~3.1 | (主流の流速分布<br>水面形, 路床せん断応力            |
| Ben-Chie-Yen <sup>2)</sup>         | ペイント 台<br>0.0103 (法こう配<br>2%)                      | ~0.82          | 6.3~13.8           | (二次流, 主流流速分布<br>乱れ, 水面形             |
| Rozovskii <sup>1)</sup>            | 滑面 (長方<br>三角)                                      | ~0.5           | 0.28~2.7           | (主流, 二次流の<br>布, 水面形                 |
| 本間 <sup>7)</sup>                   | 滑面 長方  | ~0.42          | ~0.6               | (流向, 主流流速分<br>布, 水面形                |
| 岸, 小川 <sup>8)</sup>                | 粗面 長方<br>0.019                                     | ~0.7<br>~0.7   | 1.9~7.5<br>1.5~4.7 | (主流, 二次流の流<br>速分布, 水面形, 路<br>床せん断応力 |
| 吉川, 須賀 <sup>9)</sup>               | 滑面<br>$n=0.015$<br>~0.020 長方                       | ~0.6           |                    | (主流, 二次流流速<br>損失係数                  |



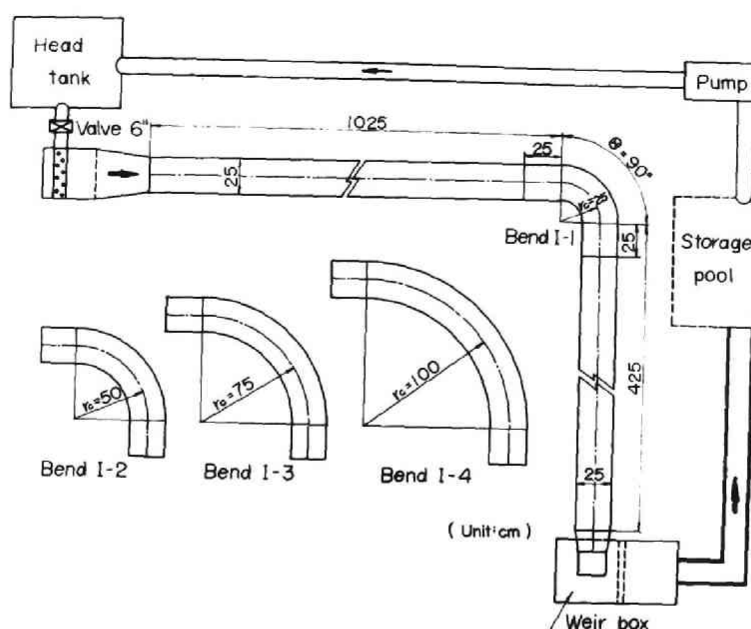


図 - 1.2.1 90° 彎曲水路 平面図

(ii) 計測装置：

流量測定には、水路下流端の三角ゼキを用い、水深測定には  $1/10\text{ mm}$  読みのポイントゲージを使用した。

流速測定は  $\phi 2\text{ mm}$  の標準型ピトー管を用い、差圧測定は  $30^\circ$  傾斜マノメーターによって行った。なお、彎曲部における主流の流速測定時には、動圧管を彎曲部同心円の接線方向に設定し、静圧測定は横断方向の水深変化の影響を除くために別途に行なった。

さらに、彎曲流で卓越する半径方向の二次流の流速を間接的に求めるために、流向測定器としてつぎに述べる円柱型ピトー管を使用した。

(iii) 円柱型ピトー管の特性：

本実験に用いた円柱型ピトー管の諸元は図 - 1.2.2 に示すとおりである。圧力孔の位置は沼知<sup>10)</sup>による一孔の円柱型ピトー管の検定値を参考にし、つぎの条件を満たすように決めた。

a) 円柱型ピトー管が流向と一致する付近で両孔の圧力変化が鋭敏であって、圧力係数  $k_p$  と回転偏角  $\gamma$  とは直線的関係を示す。

b) 円柱型ピトー管が流向と一致する点で両孔の圧力が静圧を示す。

c) 各孔を流向と一致させたとき、圧力係数が1になる。

製作された円柱型ピトー管の検定曲線 ( $k_p \sim \gamma$ ) は図-1.2.3に示すようになり、上述のb), c)の条件が完全に満足されていない。しかし、a)の点に関しては、良好な特性を示しており、流向測定には充分使用できると考えられる。

#### (iv) 実験内容：

90°彎曲水路で行なった実験の条件は表-1.2.1に示すように、主として乱流-常流状態\*であって、乱流-射流状態の実験を  $r_c = 50\text{cm}$  の場合について補足的に行なっている。また、彎曲部において、水流のはく離は  $r_c = 25\text{cm}$ ,  $Q > 4\text{ l/sec}$  以外では生じていない。

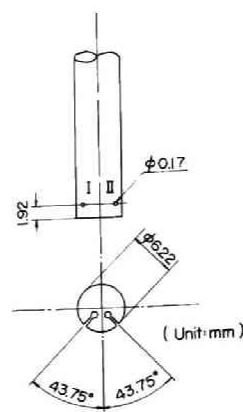


図-1.2.2

円柱型ピトー管の諸元

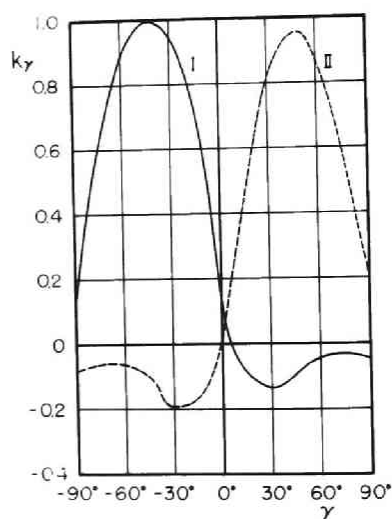


図-1.2.3

円柱型ピトー管の検定曲線

\* 一般に、彎曲流の二次元水面形に対しては、一樣水路（水路巾、こう配、粗度一定）であっても局所的に射流状態を呈する場合が可能なので、常、射流の定義が難しい。ここでは、一応 下流端近傍を除く彎曲水路の全長にわたって、流れの最小水深が限界水深以上の場合を常流と定義している。

| $r_c$<br>(cm) | $\frac{r_c}{B}$ | $i$   | $Q$<br>( $\ell/\text{sec}$ ) | $Re$<br>( $10^4$ ) | $Fr_1$<br>(彎曲始点) | 測定事項        |
|---------------|-----------------|-------|------------------------------|--------------------|------------------|-------------|
| 25            | 1               | 1/500 | 2~12                         | 0.8~4.0            | 0.23~0.47        | 水面形         |
|               |                 | "     | 8.5                          | 2.8                | 0.43             | 水面形, 流速, 流向 |
| 50            | 2               | 1/500 | 2~12                         | 0.8~4.0            | 0.25~0.50        | 水面形         |
|               |                 | "     | 8.0                          | 3.2                | 0.48             | 水面形, 流速     |
|               |                 | 1/143 | 4                            | 1.6                | 1.10             | 水面形         |
|               |                 | "     | 8.0                          | 3.2                | 1.25             | 水面形, 流速     |
| 75            | 3               | 1/500 | 2~12                         | 0.8~4.0            | 0.30~0.61        | 水面形         |
|               |                 | "     | 8.5                          | 2.6                | 0.56             | 水面形, 流速, 流向 |
| 100           | 4               | 1/500 | 2~12                         | 0.8~4.0            | 0.32~0.65        | 水面形         |
|               |                 | "     | 6.9                          | 2.7                | 0.51             | 水面形, 流速     |

表 - 1・2・1 実験条件

## (2) 横断水面形

常流状態の彎曲水路に生じる横断水面形については、主流に対して一様流速分布、自由渦分布あるいは強制渦分布を仮定した水面形の式、水位差の式が従来より検討されている。しかし、A.T.Ippen, P.A.Drinker<sup>6)</sup>および Ben-Chie-Yen<sup>2)</sup>などの最近の研究においても、これらの式の評価が一定してなく、実用上、一様流速分布式で充分と考えられている。

つぎに、上述の仮定による諸式のうち主なものを示し、常流状態の実験値と比較検討して問題点を明らかにする。

### (i) 横断水面形および水位差の式

まず、一様流速分布の仮定にもとづく場合は、遠心力に釣合う内、外岸の



水位差の式はつぎのようになる。

$$\Delta h = \frac{B U_m^2}{g r_c} \quad (1.2.1)$$

ここで、 $U_m$  は断面平均流速、 $g$  は重力の加速度である。

つぎに、自由渦の流速分布

$$U = m_1 r^{-1} \quad (1.2.2)$$

を仮定した場合は、横断水面形の式として、

$$h = h_1 + \frac{m_1^2}{2g} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (1.2.3)$$

がえられ、内、外岸の水位差は

$$\Delta h = \frac{m_1^2}{2g} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (1.2.4)$$

で表わされる。これらの式で、 $m_1$  は定数、 $r_1$ 、 $r_2$  はそれぞれ内、外岸の曲率半径、 $h_1$  は内岸の水深である。

また、強制渦の流速分布

$$U = m_2 r \quad (1.2.5)$$

を仮定した場合は、水面形、水位差の式として、それぞれつぎの式がえられる。

$$h = h_1 + \frac{m_2^2}{2g} (r^2 - r_1^2) \quad (1.2.6)$$

$$\Delta h = \frac{m_2^2}{2g} (r_2^2 - r_1^2) \quad (1.2.7)$$

ただし、 $m_2$  は定数である。

以上の式で、定数  $m_1$ 、 $m_2$  を決めるのに Ippen, Drinker は比エネルギーに関して、

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{U^2}{2g} + h \right) dr = \frac{U_m^2}{2g} + h_m \quad (1.2.8)$$

の仮定を導入した。ここで、 $h$ 、 $U$ は曲率半径 $r$ の点の水深、流速であって  
 $h_m$ は平均水深である。この仮定を用いて、 $m_1$ 、 $m_2$ を求め、(1・2・3)  
 ～(1・2・7)式に代入すると、自由渦の仮定に対して、

$$h = h_1 + \frac{U_m^2}{2g} \left( r_c^2 - \frac{B^2}{4} \right) \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (1・2・3)'$$

$$\Delta h = \frac{BU_m^2}{gr_c} \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{B}{r_c} \right)^2 \right\}} \quad (1・2・4)'$$

強制渦の仮定に対して、

$$h = h_1 + \frac{U_m^2}{2g} \left( \frac{1}{r_c^2 + B^2/12} \right) (r^2 - r_1^2) \quad (1・2・6)'$$

$$\Delta h = \frac{BU_m^2}{gr_c} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{B}{r_c} \right)^2 \right\}} \quad (1・2・7)'$$

が得られる。

水位差に関する(1・2・1)、(1・2・4)'および(1・2・6)'の三式  
 の比較からわかるように、 $B/r_c$ 、 $U_m$ が一定の場合、自由渦分布、一様分  
 布、強制渦分布の順に大きい水位差が計算される。しかし、(1・2・4)'式、  
 (1・2・7)'式はそれぞれ $r_c/B \geq 5$ 、 $r_c/B \geq 3$ に対して、(1・2・1)式  
 との差は1%以内になり、 $r_c/B$ が大きく、 $U_m$ が小さい場合にはこれらの式  
 の比較は難しいと考えられる。

## (ii) 実験値による検討

まず、彎曲部付近における水面形の全体の様相を把握するために、はく離  
 域のある場合とない場合について等水深線図の一例を示すと、図-1・2・4  
 (a)、(b)のようになる。

横断水面こう配を生ずる範囲は両者で異なるが、下流側の影響範囲が広い

点は共通している。また水面の最高（凸）点，最低（凹）点は，はく離域のない場合は，それぞれ  $\theta = 30^\circ$  の外岸， $\theta = 45^\circ$  の内岸付近に現われ，内，外岸の最大水位差は  $\theta = 45^\circ$  の測点で生じている。しかし，はく離域の存在する場合は， $\theta = 45^\circ$  付近の内岸で，はく離が生じるため，水面の最低点および最大水位差は  $\theta = 30^\circ$  の測点にあらわれる。

いま， $r_c = 25\text{cm} \sim 100\text{cm}$  の4種類の彎曲水路について， $Q = 10\text{ l/sec}$  の条件で，内，外岸水位差の主流方向の変化を測定すると，図 - 1.2.5 に示すようになる。同図では，水位差に関する (1.2.1)，(1.2.4)'，(1.2.7)' 式に実測の  $U_m$  を代入して求めた計算値が比較されている。はく離を生ずる  $r_c = 25\text{cm}$  の場合を除いて，最大水位差は  $\theta = 45^\circ$  の測点に現われており，計算値より大きい値を示している。

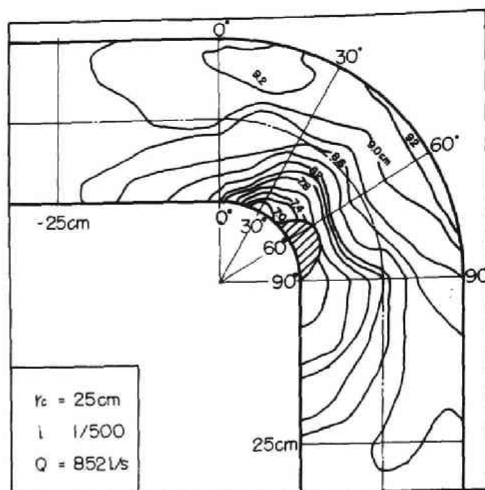


図 - 1.2.4(a)  
等水深線図（はく離域のある場合）

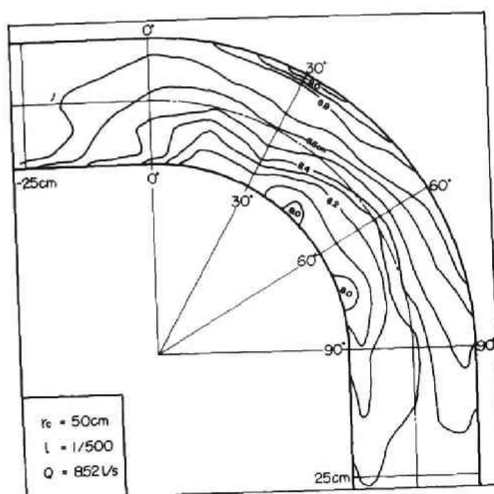


図 - 1.2.4(b)  
等水深線図（はく離域のない場合）

さらに、最大水位差の測定値と水位差の三式とを6段階の流量について比較した結果が、図-1.2.6に示されている。図にみられるように、はく離域のない場合には、測定値はいずれも三式の曲線を上まわっており、実測値と理論値との差は平均10%，最大25%に達している。

曲率半径の小さい場合あるいは流速の大きい場合は、自由渦の仮定による(1.2.4)'式が実測値に近い値を示すが、水位差を過小評価する危険性は伴なうと考えられる。

つぎに、最大水位差を与える測点で、(1.2.3)'および(1.2.6)'式と実測の横断水面形とを比較すると、図-1.2.7のようになる。曲率半径の小さい $r_c = 25\text{ cm}$ 、 $50\text{ cm}$ の場合では、従来、指摘されているように、凸水面形をなしており、自由渦分布にもとづく(1.2.3)'式の曲線に類似している。しかし、 $r_c = 75\text{ cm}$ 、 $100\text{ cm}$

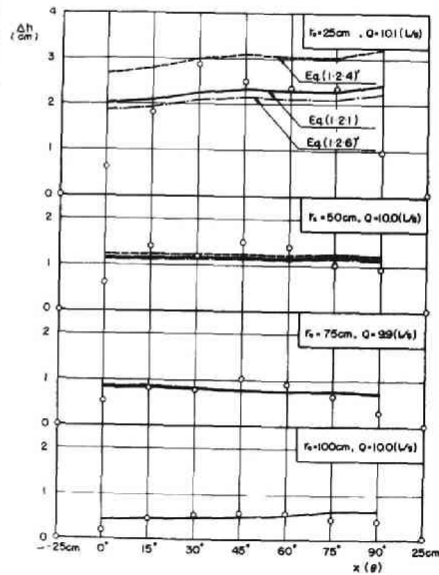


図-1.2.5

主流方向への水位差の変化と計算値との比較

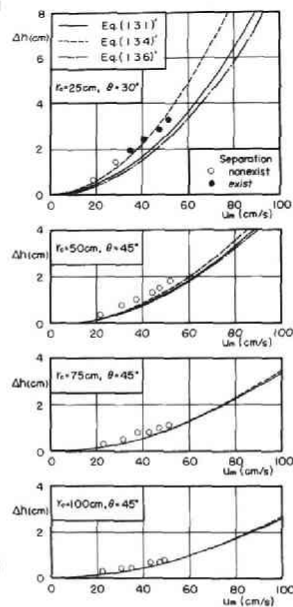


図-1.2.6

実測の最大水位差と理論式との比較

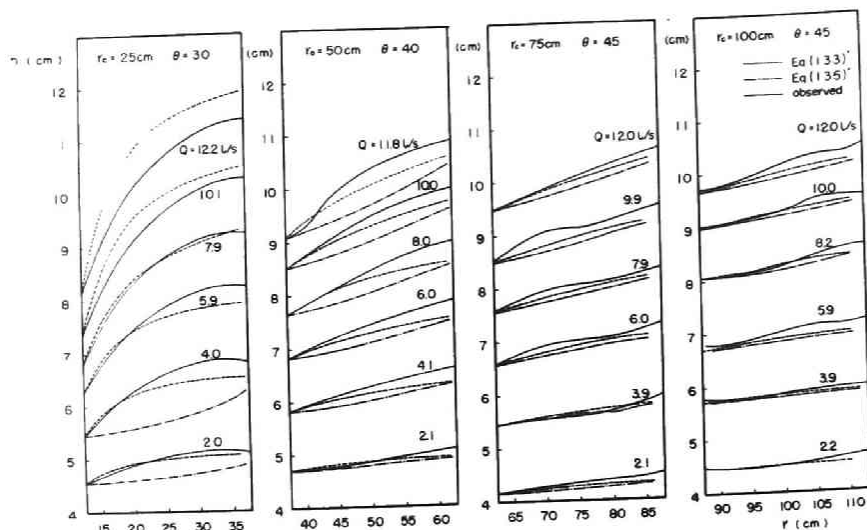


図 - 1.2.7 実測の横断水面形と理論式との比較

の場合では、実測の水面形は流量によって異なり、定性的にも両式との対応を論ずることができない。

また、図 - 1.2.8 は 4 種の水路について最大水位差を生ずる付近における流速測定値を自由渦分布の (1.2.2) 式あるいは強制渦分布 (1.2.5) 式と比較したものである。なお、定数  $m_1$ ,  $m_2$  は水路中心の流速を基準として定めている。 $r_c = 25 \text{ cm}$  では自由渦の分布にほぼ一致しており、横断水面形の特性に対応するが、 $r_c = 50 \text{ cm}$ ,  $75 \text{ cm}$  では明確でなく  $r_c = 100 \text{ cm}$  では強制渦に近い特性を示している。

以上、横断水面形に関する (1.2.1), (1.2.3)' ~ (1.2.7)' の各式は、完全流体としての取り扱いにもかかわらず、実際より緩和された現象を記述するという矛盾した結果になった。その理由としては、Ippen, Drinker による (1.2.8) 式の仮定の不合理性が指摘される。すなわち、(1.2.8) 式の右辺第 1 項は、 $U$  が一定でないときには、当然、

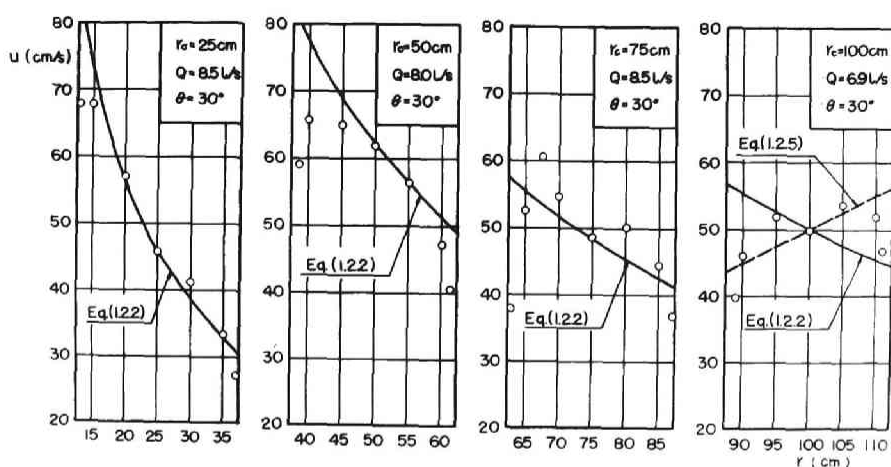


図 - 1.2.8 流速測定値と自由渦分布，強制渦分布との比較

$C \frac{U_m^2}{2g}$  ( $C > 1$ ) となり，(1.2.3)，(1.2.6)' 式の右辺第2項および (1.2.4)', (1.2.7)' 式の右辺を  $C$  倍する必要がある。

しかし， $C$  を決める問題は，結局， $U$  分布の仮定に帰着するわけで，二次流の影響を考慮せずに先験的な仮定を用いる点に問題があると考えられる。この点については，本節の(4)項で検討するとともに，第4章で改めて考察するつもりである。

### (3) エネルギー線と断面平均水面形

開水路流れにおける一次元解析法の拡張あるいは補正として，彎曲部の流れも断面平均量としての取り扱いがなされる。その場合，彎曲部におけるエネルギー損失水頭，彎曲部による上，下流の影響域の長さ，流速分布による

エネルギー補正係数の評価が問題になっている。

ここでは、流量、水深の測定からえられるエネルギー線および断面平均の水面形の特性を検討し、流速分布を考慮したエネルギー線については次項で述べる。

### (i) 彎曲水路におけるエネルギー線

流速分布の変化を考えない場合には、断面平均エネルギーは

$$H = H_0 + z = h_m + \frac{U_m^2}{2g} + z \quad (1.2.9)$$

で表わされる。ここで、 $H_0$  は断面平均の水理量  $h_m$ ， $U_m$  で表わした比エネルギー， $z$  は水平な基準面からの高さである。いま， $H_0$  を全微分形で示すと，

$$\delta H_0 = (1 - F_r^2) \delta h_m \quad (1.2.10)$$

となる。ここで  $F_r = U_m / \sqrt{gh_m}$  である。

(1.2.10) 式より

$$\begin{aligned} F_r < 1 \text{ のとき } \delta h_m \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\longleftrightarrow \delta H_0 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \\ F_r > 1 \text{ のとき } \delta h_m \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\longleftrightarrow \delta H_0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

の対応関係が得られる。したがって、常流と射流では、水深変化とエネルギー変化との関係が逆になる。

こうした関係は彎曲水路の流れでも当然なりたつわけで、R. Müller<sup>11)</sup> は一様な彎曲水路における常流、射流限界流状態に対して図-1.2.9に示すような水深、エネルギー線の対応を明らかにしている。すなわち、彎曲部がなければ、等流水深  $h_0$  で流れるが、彎曲部のために  $L + L'$  区間で  $H_f$  のエネルギーが消費され、それに対応して  $\Delta z$  だけ、水面が上昇する。常流では A 点で  $\Delta z$  だけ堰上げられ、射流状態では  $B'$  点で  $\Delta z$  だけ高まり、い

ずれも下流で等流水深に接近することになる。

(ii) 実験値による検討

(1・2・9) 式で表わされるエネルギー線を4種の水路で6段階の流量について図示した結果が、図-1・2・10(a)~(d)に示されている。

これらの図からわかるように、 $r_c = 25\text{ cm}$  の場合 (図-1・2・10(a)) では、彎曲部内にはく離が生じているためエネルギー線に急激な変化があらわれている。しかし、他の場合ではエネルギー線の変化が顕著でなく、管路と同様な損失水頭を評価することは難しいと考えられる。

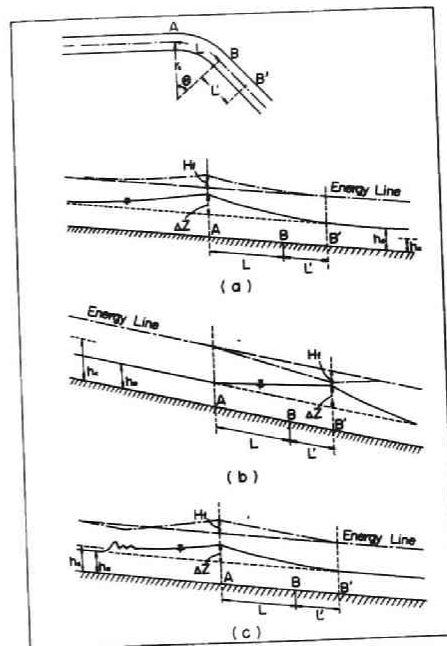


図-1・2・9 一様彎曲水路のエネルギー線と水面形

常流状態で、はく離を生ずる場合と生じない場合について、エネルギー線と水面形とを対比した一例を挙げるとそれぞれ図-1・2・11(a), (b) になる。これらの図で、 $h_{a1}$  は彎曲部流入点 ( $\theta = 0$ ) から逐次計算法で追跡した水面形を示しており、 $h_{a2}$  は下流直線部の任意の点より試算を繰返し、上流直線部の水面と接した水面形を表わしている。また、射流状態の一例を図-1・2・11(c)に示してある。

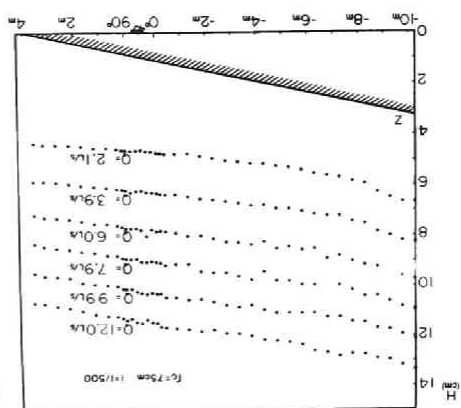
これらの図をMüllerの示した図-1・2・9とを比較するとつぎのことが言えよう。

1) 本実験で常流状態の場合、下流端の堰上げの影響が効いており、図-1・2・9のように等流水深へ接近する傾向はみられない。

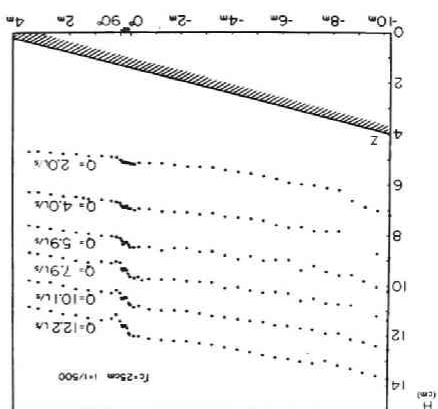


図 - 1・2・10 (a)~(d) エネルギー線 (常流)

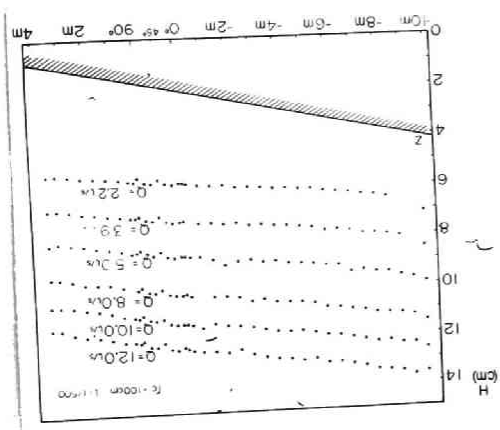
(c)



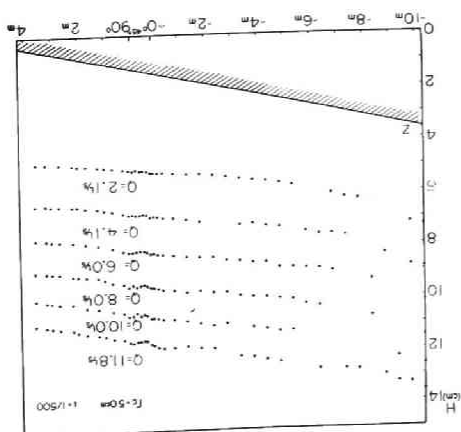
(a)



(d)

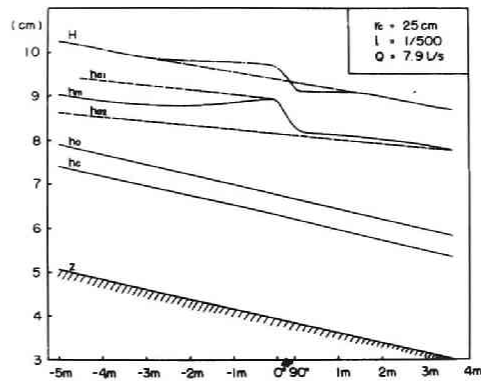


(b)

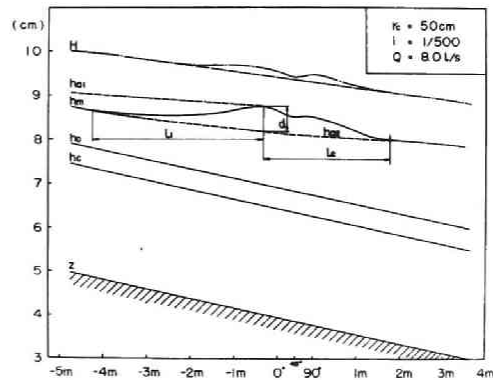


2) はく離を生ずる場合のエネルギー線は単調に低減しない。すなわち、はく離点付近で、上、下流を結ぶエネルギー線よりさらに降下し、下流直線部にもエネルギー損失の緩和区間が現われる。

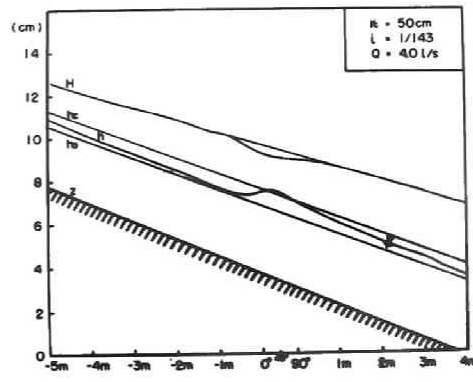
3) 逐次計算法で求めた水面形  $h_{a1}$  は実測水面形とかなり特性が異なっており、従来考えられているように彎曲部流入点から背水曲線 (M I 型) として取り扱うことはできない。また、 $h_{a2}$  曲線は図 - 1・2・11(b) の場合は実測の上流水面形に近似的に接続する点が求められる。しかし、(a) の場合は本実験水路の範囲内では接続点が求められなく、エネルギー損



(a) 常流 (はく離する場合)



(b) 常流 (はく離しない場合)



(c) 射流

図 - 1・2・11(a)~(c)

エネルギー線と平均水面形

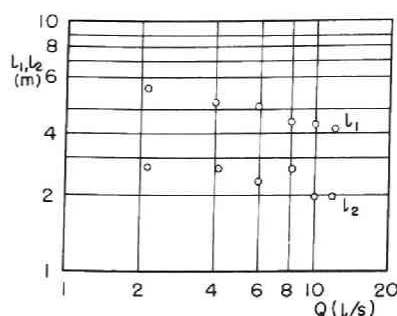
失高，影響域の評価はできない。

4) 常流状態で  $H_f$ ,  $\Delta z$  が定義される点は必ずしも彎曲部の流入点 A に対応しない。図 - 1.2.11 の二例では，(a) はほぼ A 点に対応しているが，(b) は上流側に存在している。

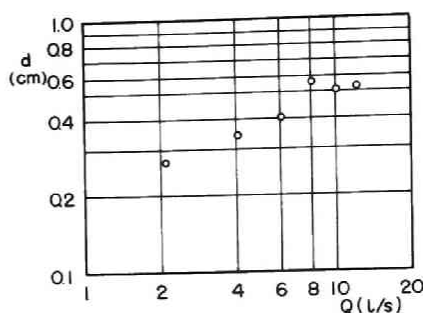
5) 射流状態の場合のエネルギー損失区間も図 - 1.2.9(b) に示されているように，彎曲部流入点から流出点より下流側の区間と限定することは難しい。本実験の場合は逆に流入点より上流に損失区間が延びており，下流側では緩和区間となっている。

以上の点から，開水路流れでは彎曲部の影響域，損失水頭といった局所的なエネルギー損失の代表量を実験的に決定することは極めて難しいと考えられる。とくに，1) に述べたように，彎曲水路の下流端の条件に支配される場合が多く，図 - 1.2.9(a) で定義される  $H_f$ ,  $\Delta z$  の有効性も疑問視される。

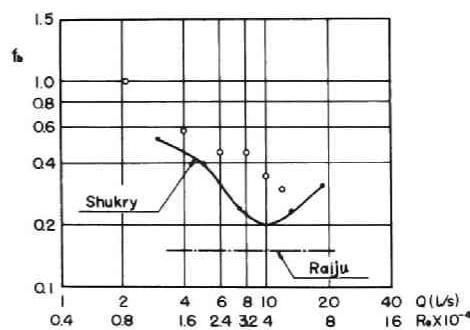
いま，このような場合の便法として，図 - 1.2.11(b) に示したように， $h_{a2}$  曲線で分離される水面形について， $\Delta z$  に対応する  $d$  および影



(a)  $l_1$ ,  $l_2$  と  $Q$  との関係



(b)  $d$  と  $Q$  との関係



(c)  $f_b$  と  $Q$  ( $Re$ ) との関係

図 - 1.2.12(a)~(c)

エネルギー損失の代表量と  $Q$  との関係 ( $re = 50cm$ ,  $i = 1/500$ )

響範囲の上流側，下流側の長さ  $l_1, l_2$  を考えてみる。(1・2・10)式から明らかなように， $d$  はエネルギー損失水頭  $H_f'$ ，および損失係数  $f_b$  とつぎのように関係づけられる。

$$H_f' = (1 - F_r^2) d = f_b \frac{U_m^2}{2g} \quad (1 \cdot 2 \cdot 11)$$

このようにして定義された  $d, l_1, l_2, f_b$  を  $r_c = 50\text{cm}$  で常流状態の場合の各流量について求めると，図 - 1・2・12(a)~(c) に示すようになる。図 - 1・2・12(c) には， $r_c/B = 2, \theta/180^\circ = 1/2$ ，に対する Shukry<sup>4)</sup> の測定値  $f_b(R_e)$  および同条件で一定値を与えている S.P. Rai ju<sup>12)</sup> の測定値が比較してある。

これらの図からわかるように，流量の増加とともに影響範囲は狭まり，損失水頭は増加している。一方， $f_b$  は流量あるいは Reynolds 数の増加とともに減少しており，Shukry の測定値のように極小値はみられない。 $f_b$  の絶対値は Shukry, Rai ju に比べて大きく現われており，これは上，下流直線部の条件および損失水頭算定法の違いによるものと考えられる。

#### (4) 運動量およびエネルギー補正係数

ここでは，主流成分と二次流成分の測定結果を示し，運動量およびエネルギー補正係数の計算結果について述べよう。

主流成分の等流速線図を(1)に述べた各実験条件について示すと，図 - 1・2・13 (a)~(e) のようになる。

主流成分によるエネルギー補正係数

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{u}{U_m} \right)^3 dA \quad (1 \cdot 2 \cdot 12)$$

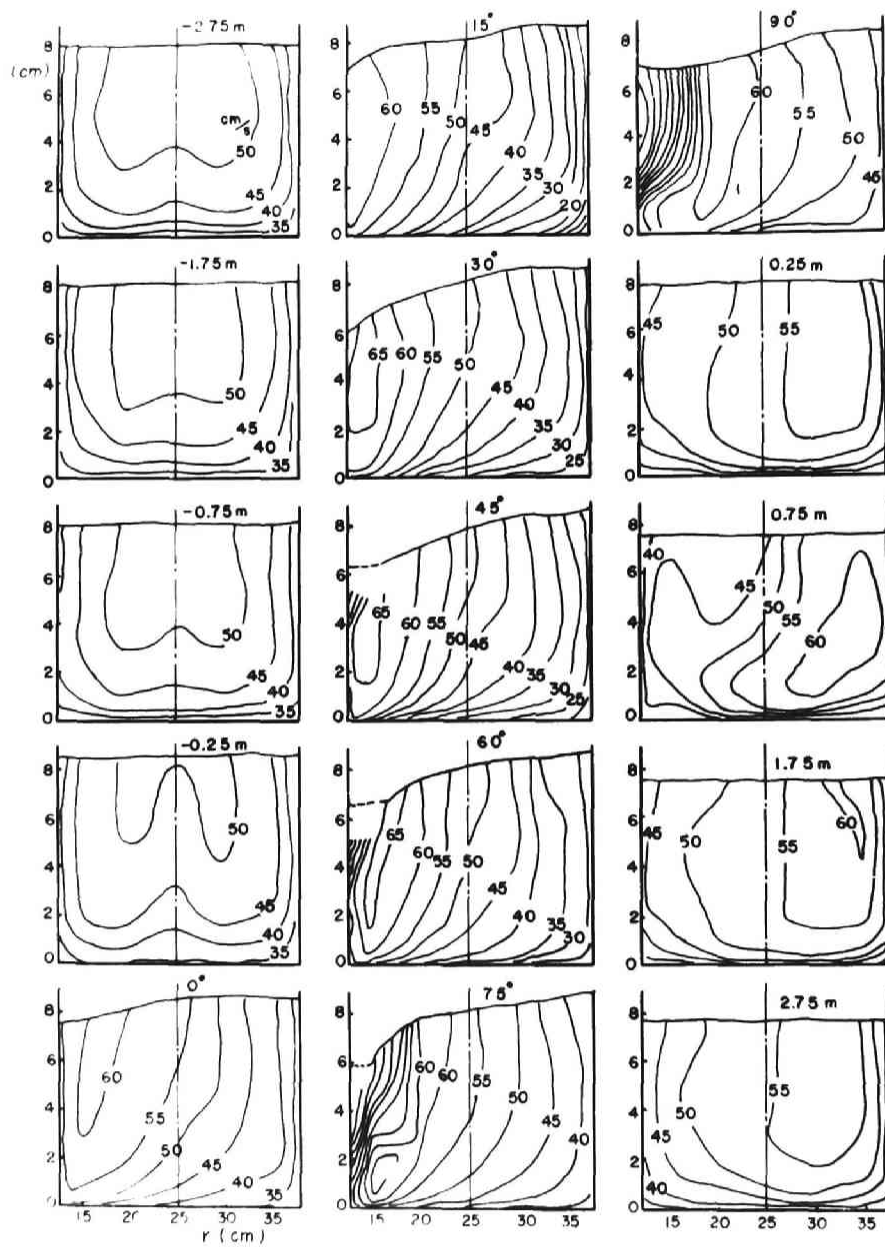


図 - 1.2.13(a)  $u$  の等流速線図

$$(r_c = 25 \text{ cm}, L = 1/500, Q = 8.5 \text{ l/s})$$

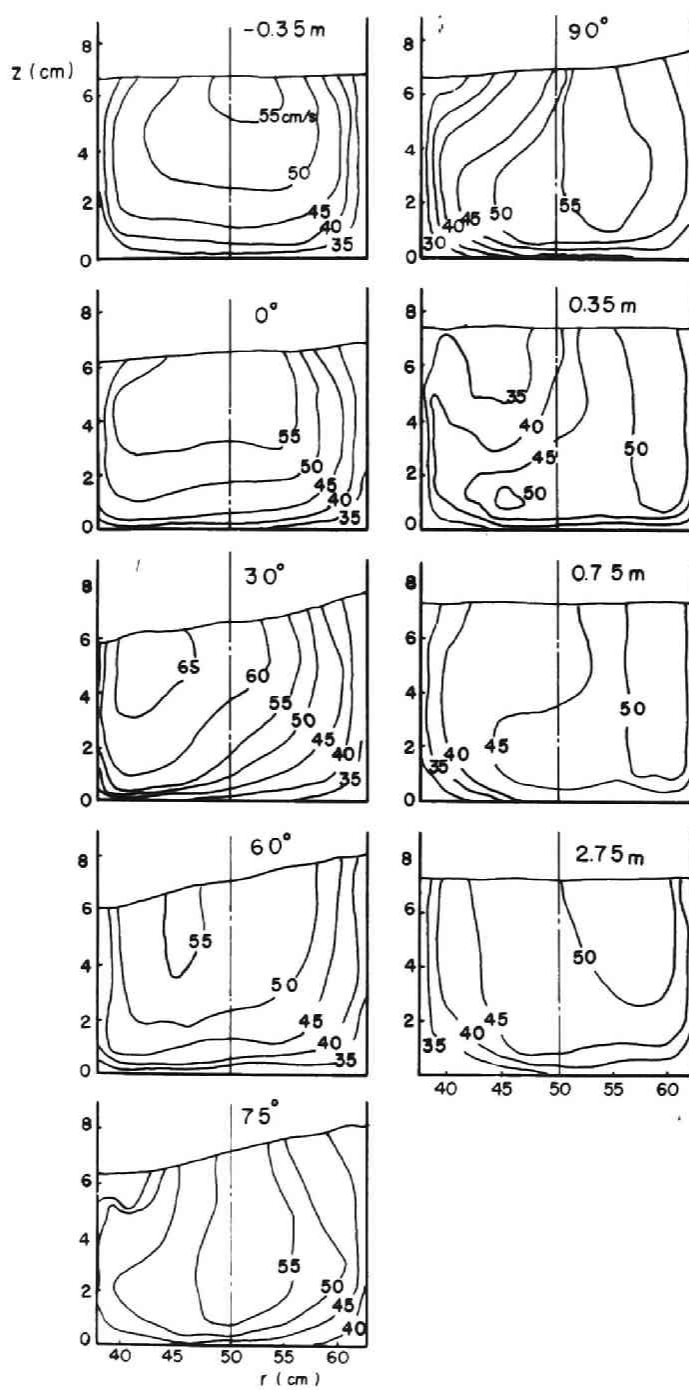


図 - 1.2.13(b)  $u$  の等流速線図

( $r_c = 50 \text{ cm}$ ,  $i = 1/500$ ,  $Q = 8.0 \text{ l/s}$ )

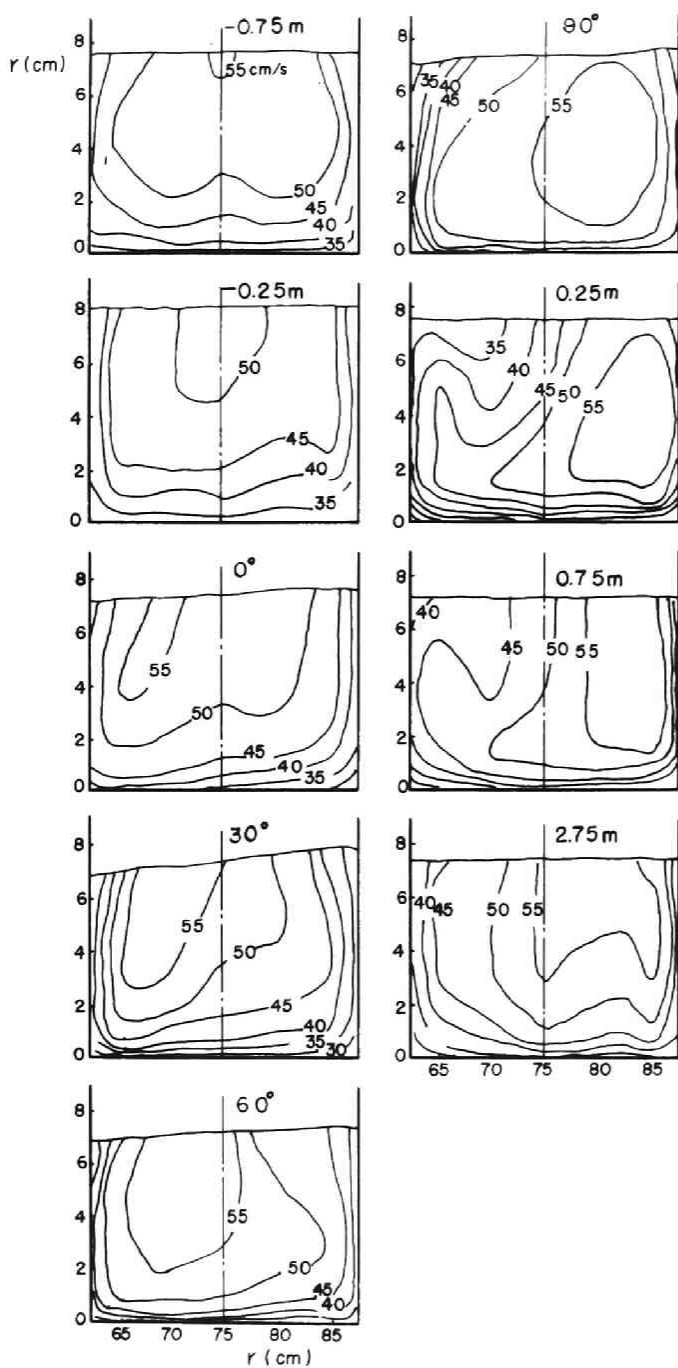
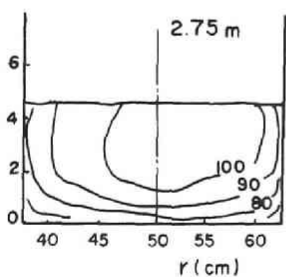
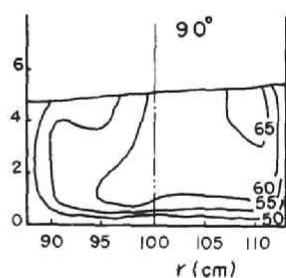
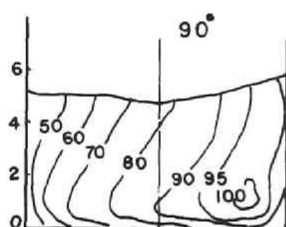
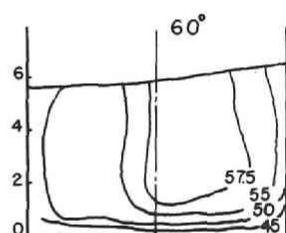
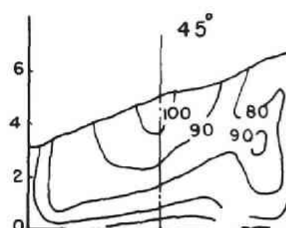
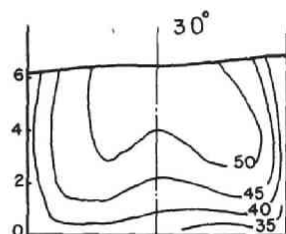
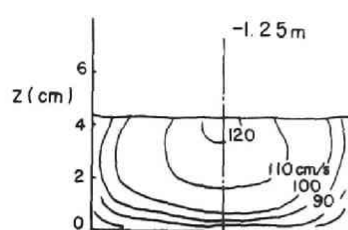
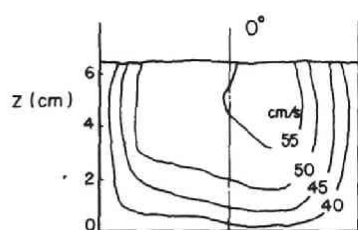


図 - 1・2・13(c)  $u$  の等流速線図

( $r_c = 75\text{ cm}$ ,  $i = 1/500$ ,  $Q = 8.5\text{ l/s}$ )



(d)  $r_c = 100\text{ cm}$ ,  $i = 1/500$   
 $Q = 6.9\text{ l/s}$

(e)  $r_c = 50\text{ cm}$ ,  $i = 1/143$   
 $Q = 8.0\text{ l/s}$

図 - 1.2.13(d)~(e) U の等流速線図



および運動量補正係数

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{U}{U_m} \right)^2 dA \quad (1.2.13)$$

の計算結果は表-1.2.2に示されている。

表にみられるように、 $\alpha$ 、 $\beta$ は $r_c = 25\text{ cm}$ の場合に彎曲部内で大きい値を示し、 $\theta = 15^\circ$ で最大値 $\alpha = 1.231$   $\beta = 1.08$ となっている。しかし、 $r_c = 50\text{ cm} \sim 100\text{ cm}$ では、こうした傾向がみられなく、普通のフリュームで知られている $\alpha = 1.10 \sim 1.20$ 、 $\beta = 1.03 \sim 1.07$ の範囲の値を示している。

このように $\alpha$ 、 $\beta$ の値は、等流速線図にみられる自由渦から強制渦への特性を反映していないようである。また、(2)で述べた、Ippen, Drinkerの仮定に対して $\beta$ で補正することは難しく、 $r_c = 25\text{ cm}$ の場合を除いては、補正值も充分でないことがわかる。

一方、主流成分 $u$ と平面内の流向 $\gamma$ より

$$v = u \tan \gamma$$

として求めた二次成分 $v$ の分布が図-1.2.14(a)~(b)に示されている。

つぎに、二次流成分を考慮した場合に断面平均のエネルギーが、(1.2.9)式によるものとどの程度異なるか検討してみよう。

二次流成分として $v$ だけを考慮し、圧力は静水圧分布をするものと考えると、断面平均のエネルギーは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{Q} \int_A \left\{ h + \frac{1}{2g} (u^2 + v^2) \right\} u dA + Z \quad (1.2.14) \\ &= \alpha_1 h_m + \alpha_2 \frac{U_m^2}{2g} + Z \end{aligned}$$

表 - 1・2・2  $\alpha$ ,  $\beta$  の計算表

| 測定断面       | $h_c$ (cm)  | 25       |         | 50       |         | 75       |         | 100      |         | 50       |         |
|------------|-------------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
|            | $i$         | $1/500$  |         | $1/500$  |         | $1/500$  |         | $1/500$  |         | $1/143$  |         |
|            | $Q$ (ℓ/sec) | 8.5      |         | 8.0      |         | 8.5      |         | 6.9      |         | 8.0      |         |
|            |             | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| - 4.75 $m$ |             | 1.064    | 1.024   | 1.087    | 1.030   |          |         |          |         |          |         |
| - 2.75 $m$ |             | 1.081    | 1.030   |          |         |          |         |          |         |          |         |
| - 1.75 $m$ |             | 1.090    | 1.033   | 1.101    | 1.037   |          |         |          |         | 1.096    | 1.032   |
| - 0.75 $m$ |             | 1.075    | 1.037   | 1.051    | 1.017   | 1.061    | 1.021   |          |         |          |         |
| - 0.25 $m$ |             | 1.097    | 1.035   |          |         | 1.063    | 1.022   |          |         |          |         |
| 0°         |             | 1.081    | 1.028   | 1.121    | 1.044   | 1.074    | 1.027   | 1.101    | 1.037   |          |         |
| 15°        |             | 1.231    | 1.080   |          |         |          |         |          |         |          |         |
| 30°        |             | 1.192    | 1.066   | 1.077    | 1.028   | 1.094    | 1.033   | 1.097    | 1.036   |          |         |
| 45°        |             | 1.227    | 1.077   | 1.083    | 1.029   |          |         |          |         | 1.124    | 1.044   |
| 60°        |             | 1.206    | 1.080   | 1.078    | 1.028   | 1.066    | 1.026   | 1.060    | 1.022   |          |         |
| 75°        |             | 1.147    | 1.050   | 1.109    | 1.038   |          |         |          |         |          |         |
| 90°        |             | 1.134    | 1.052   | 1.051    | 1.018   | 1.054    | 1.020   | 1.050    | 1.019   | 1.129    | 1.061   |
| 0.25 $m$   |             | 1.065    | 1.024   | 1.052    | 1.020   | 1.168    | 1.064   |          |         |          |         |
| 0.75 $m$   |             | 1.067    | 1.024   |          |         | 1.129    | 1.047   |          |         |          |         |
| 1.75 $m$   |             | 1.063    | 1.022   |          |         |          |         |          |         |          |         |
| 2.75 $m$   |             | 1.085    | 1.031   |          |         | 1.095    | 1.054   |          |         | 1.108    | 1.038   |

ここで,

$$\alpha_1 = \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{h}{h_m} \right)^2 \frac{U}{U_m} dr, \quad U = \frac{1}{h} \int_0^h u dz \quad (1.2.15)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{u}{U_m} \right)^3 \left\{ 1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2 \right\} dA \quad (1.2.16)$$

である。(1.2.9)式と比較して、上式では補正係数 $\alpha_1$ , および $\alpha_2$ が付加されている。

従来、 $\alpha_1$  は考慮されていないが、横断方向の水面変化が大きく $h_m > \frac{U_m^2}{2g}$ となる場合には $\alpha_2$ と同様に検討する必要がある。また、一般に $\alpha_2 > 1$ であるが、 $\alpha_1$ はつぎの理由で $\alpha_1 \geq 1$ の場合が考えられる。

すなわち、(1.2.15)式で $U = U_m + \Delta U$ ,  $h = h_m + \Delta h$ とおくと

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{U}{U_m} \cdot \frac{\Delta h^2}{h_m^2} + \frac{\Delta U}{U_m} \cdot \frac{\Delta h}{h_m} \right) dr$$

となり、自由渦分布のように

$$\Delta U \Delta h < 0 \quad \frac{U}{U_m} \cdot \frac{\Delta h^2}{h_m^2} < \frac{\Delta U}{U_m} \cdot \frac{\Delta h}{h_m}$$

の場合が存在する。

$r_c = 25\text{cm}$ ,  $75\text{cm}$  の場合について、 $u$ ,  $v$ ,  $h$  の測定値より $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ を計算すると表-1.2.3のようになる。また、同表には、主流成分の $\alpha$ と比較するために、 $\alpha_2 - \alpha$ ,  $\frac{\alpha}{\alpha_2}$  が示されている。これらのうち、 $\alpha_2 - \alpha$  は Shukry の定義した二次流の強さの  $\frac{1}{100}$  に相当する。Shukry の測定値は Reynolds 数,  $\frac{h}{B}$ ,  $\frac{r_c}{B}$ ,  $\frac{\theta}{180^\circ}$  の関数になっており, Reynolds 数,  $\frac{h}{B}$  の実験範囲が本実験と異なるので,  $\frac{r_c}{B}$ ,  $\frac{\theta}{180^\circ}$  で比較すると,  $r_c = 25\text{cm}$  に対して  $\alpha_2 - \alpha = 0.020 \sim 0.028$ ,  $r_c = 75\text{cm}$  に対して,  $\alpha_2 - \alpha = 0.012 \sim 0.028$  となる。Shukry の測定断面は彎曲部の下流

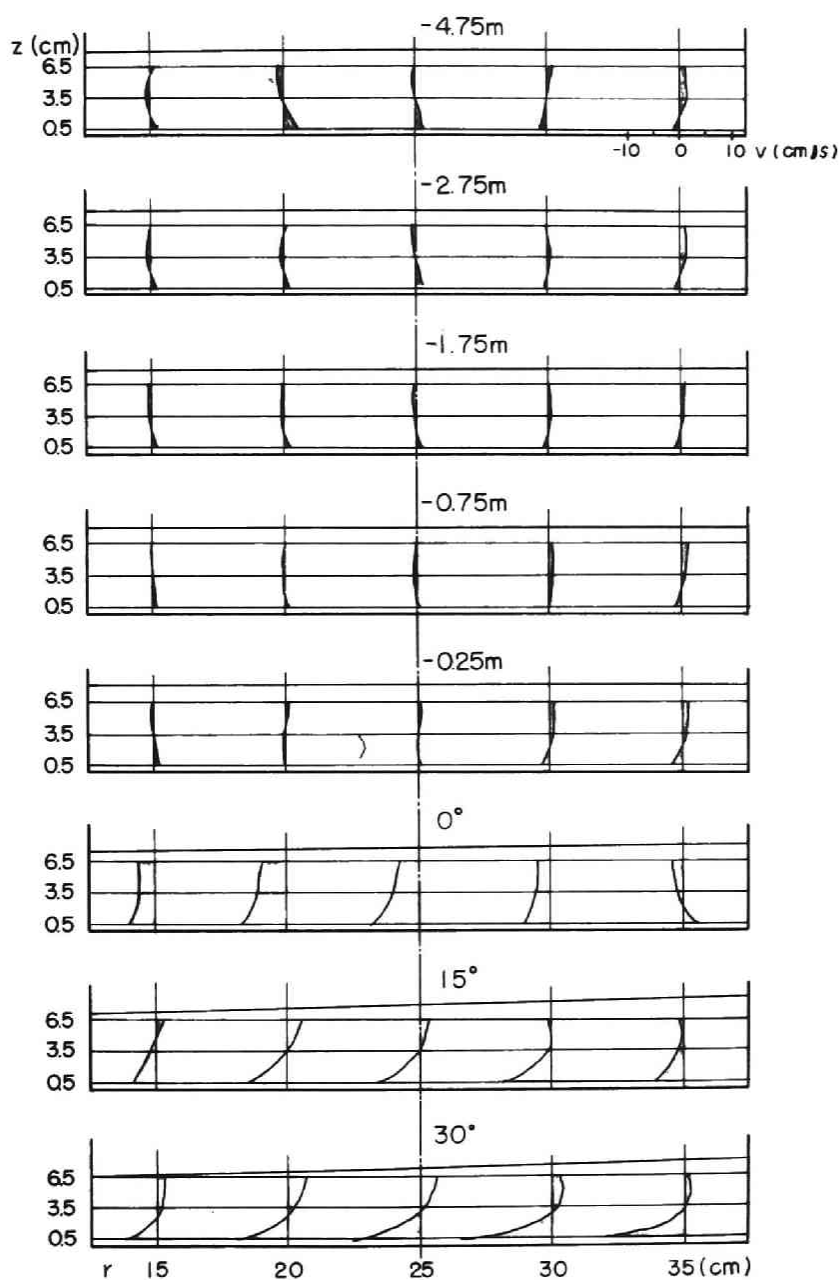


図 - 1.2.14 (a)  $v$  の分布  
 ( $r_c = 25\text{cm}$ ,  $i = 1/500$ ,  $Q = 8.5\text{ℓ/s}$ )

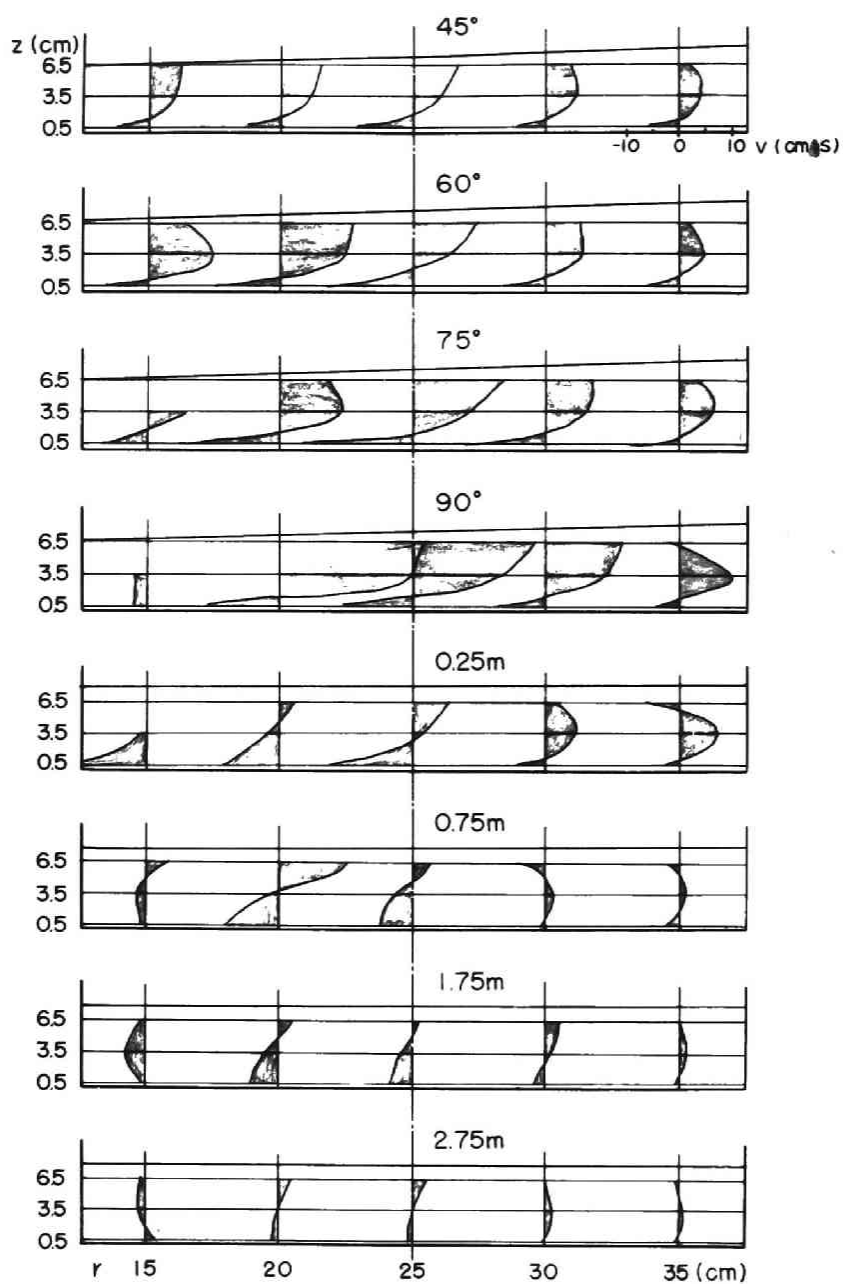


図 - 1・2・14 (a)'  $v$  の分布

( $r_c = 2.5$  cm,  $i = 1/500$ ,  $Q = 8.5$  l/s)

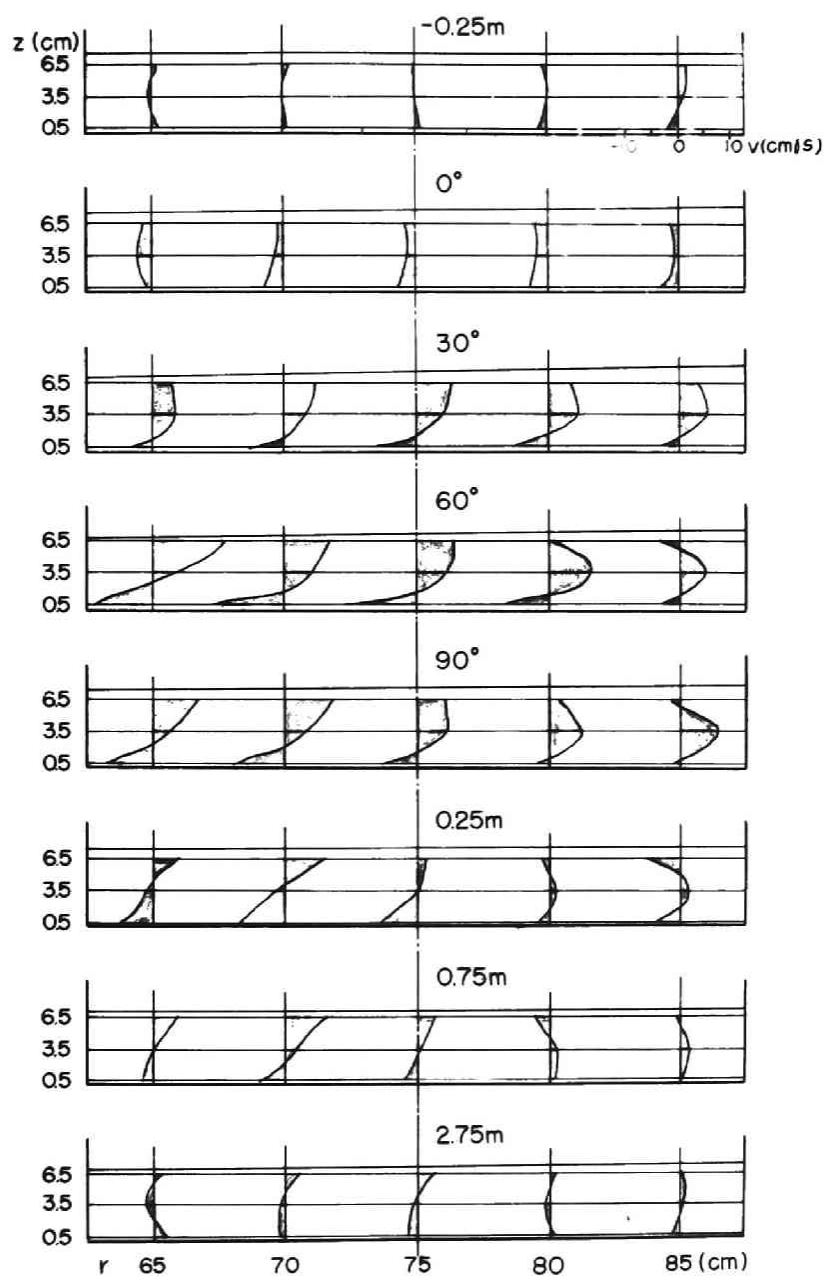


図 - 1.2.14(b)  $v$  の分布

( $r_c = 7.5 \text{ cm}$ ,  $i = 1/500$ ,  $Q = 8.5 \text{ l/s}$ )

表 - 1・2・3  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  の計算表

| 測定断面   | $r_c = 25\text{cm}, i = 1/500, Q = 8.5\frac{\text{ℓ}}{\text{s}}$ |            |          |                     |                           | $r_c = 75\text{cm}, i = 1/500, Q = 8.5\frac{\text{ℓ}}{\text{s}}$ |            |          |                     |                           |
|--------|--|------------|----------|---------------------|---------------------------|--|------------|----------|---------------------|---------------------------|
|        | $\alpha_1$   | $\alpha_2$ | $\alpha$ | $\alpha_2 - \alpha$ | $\frac{\alpha}{\alpha_2}$ | $\alpha_1$   | $\alpha_2$ | $\alpha$ | $\alpha_2 - \alpha$ | $\frac{\alpha}{\alpha_2}$ |
| 0      | 0.982  | 1.10       | 1.08     | 0.02                | 0.98                      | 0.997  | 1.08       | 1.07     | 0.01                | 0.99                      |
| 15°    | 0.983  | 1.25       | 1.23     | 0.02                | 0.98                      |  |            |          |                     |                           |
| 30°    | 0.970  | 1.25       | 1.19     | 0.06                | 0.95                      | 1.000  | 1.12       | 1.09     | 0.03                | 0.97                      |
| 45°    | 0.983  | 1.31       | 1.23     | 0.08                | 0.94                      |  |            |          |                     |                           |
| 60°    | 1.010  | 1.31       | 1.21     | 0.10                | 0.92                      | 1.000  | 1.10       | 1.07     | 0.03                | 0.97                      |
| 75°    | 1.010  | 1.27       | 1.15     | 0.12                | 0.91                      |  |            |          |                     |                           |
| 90°    | 1.010  | 1.19       | 1.13     | 0.06                | 0.95                      | 1.000  | 1.06       | 1.05     | 0.01                | 0.99                      |
| 0.25 m |  | 1.08       | 1.07     | 0.01                | 0.99                      |  |            |          |                     |                           |
| 0.75 m |  | 1.08       | 1.06     | 0.02                | 0.98                      |  |            |          |                     |                           |

7 cmなので、本実験の90°断面の値と比較するとほぼ近い値を示していることがわかる。しかし、Reynolds数、 $h/B$ が主要素となっているので、断定はできないであろう。

表 - 1・2・3で $r_c = 25\text{cm}$ の場合、 $\alpha_1$ は水深に対して最大3%の影響しか与えないが、この水理条件では、 $2gh_m/U_m^2 \approx 10$ なので、 $\alpha_2$ と同程度の補正量に相当する。しかし、 $r_c = 75\text{cm}$ では、 $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha$ で充分近似できよう。

いま、断面平均エネルギーを(1・2・9)式で求めた場合と(1・2・14)式による場合とを比較すると、図 - 1・2・15 のようになる。 $r_c = 25\text{cm}$ の場合は彎曲部におけるエネルギー線の形状が変わるが、損失水頭に対する影響は

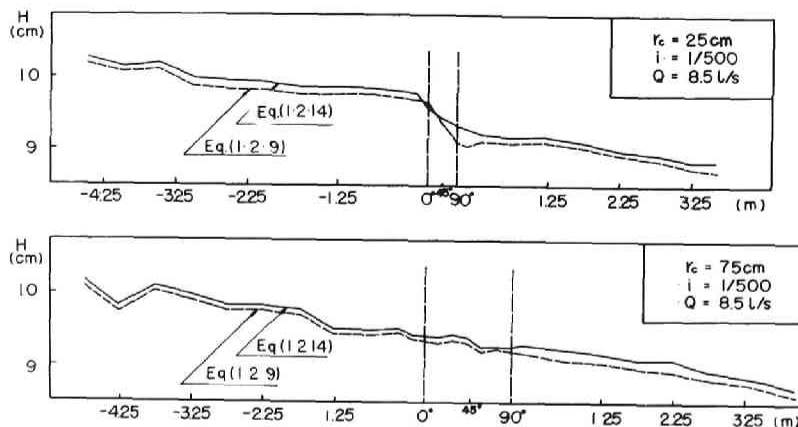


図 - 1.2.15 エネルギー線の比較

$r_c = 75 \text{ cm}$  の場合と同様に少いと考えられる。

### 第 3 節 180°彎曲水路における実験

#### (1) 実験内容

この実験は京都大学防災研究所宇治川水理実験所で行なったもので、実験装置の概要はつぎのとおりである。

実験に使用した水路は水路巾  $50 \text{ cm}$ 、深さ  $30 \text{ cm}$  のコンクリート製の長方形断面水路 ( $n \approx 0.013$ ) であり、路床こう配  $1/500$  にモルタル仕上されている。その平面形状は図 - 1.3.1 に示すように上、下流側それぞれ  $10 \text{ m}$ 、 $11.5 \text{ m}$  の直線部の間に彎曲偏角  $180^\circ$  の単一彎曲部が挿入されている。



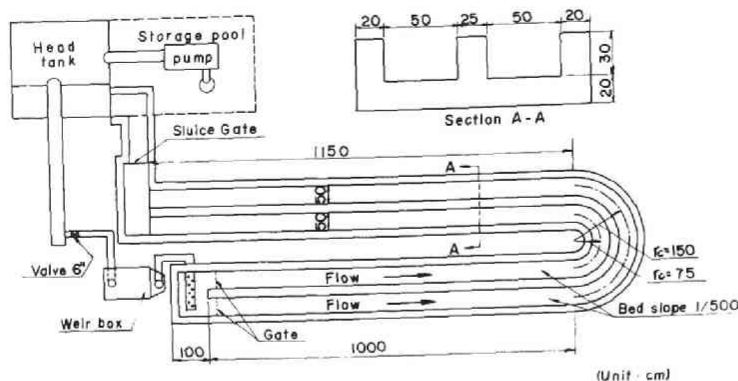


図 - 1.3.1 180° 彎曲水路平面図

彎曲部の中心曲率半径は  $r_c = 75\text{ cm}$ ,  $150\text{ cm}$  の二種類で中心曲率半径，水路巾の比はそれぞれ 1.5 と 3 である。

計測装置としては流量測定に台形ゼキを用い水深測定には  $1/10\text{ mm}$  読みのポイントゲージを使用した。主流の流速測定は彎曲部の水深変化に即応するように直径  $7\text{ mm}$  のプラントル型ピトー管で行ない，路床面近くの測定には直径  $1\text{ mm}$  の総圧管を用い，静圧測定は別途に行なった。また，流水断面内の半径方向，鉛直方向の流速成分を間接的に求めるために，三次元流向計測装置を製作した。

流向計測装置は，球型ピトー管，回転支持棒（分度円付）および平行移動装置から構成され，球型部の中心を固定中心として水平面内（ $\pm 45^\circ$ ）および鉛直面内（ $\pm 20^\circ$ ）回転し，三次元的な流向を測定できるようになっている。

実験には  $r_c = 75\text{ cm}$ ,  $150\text{ cm}$  の場合ともに，流量  $10\text{ l/s}$  を通水し，乱流一常流状態で，はく離域の存在しない流況で行なった。

流速，流向，水深の測定断面は，図 - 1.3.2 に示すとおりである。

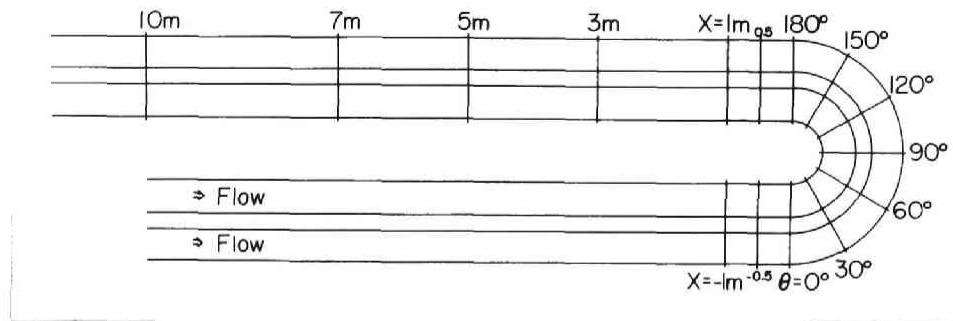


図 - 1.3.2 測定断面

## (2) 球型ピトー管の特性と測定精度

### (i) 球型ピトー管の特性

球型ピトー管による流向測定および流速成分の算定はつぎのようにして行なわれる。

いま、円筒座標系を考え、主流方向に  $\theta$ 、横断方向に  $r$ 、鉛直上方に  $z$  をとる。また、速度ベクトルの大きさを  $q$  とし、それが  $\theta-r$  平面および  $\theta-z$  平面となす角をそれぞれ  $\delta$ 、 $\gamma$  とすると、 $\theta$ 、 $r$ 、 $z$  方向の流速成分  $u$ 、 $v$ 、 $w$  はつぎのように与えられる。

$$u = q \cos \gamma \cos \delta, \quad v = q \sin \gamma \cos \delta, \quad w = q \sin \delta$$

したがって、上の関係で三つの量を測定すればよいわけであるが普通  $u$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  を測定し、

$$v = u \tan \gamma, \quad w = u \sec \gamma \cdot \tan \delta$$

によって、二次流成分  $v$ 、 $w$  が決定されている。

A. Shukry<sup>4)</sup> によって行なわれた測定も以上の方法に基づいているが、球

型ピトー管の圧力係数の決定に問題があると思われる。

本研究でも，前節に述べた  $90^\circ$  彎曲水路の実験において，図 - 1・3・3(a) に示す

Shukry と同型の鉛直な莖部をもつピトー管を製作し，直線流で検定を行なった。各圧力孔の圧力係数  $k_{\tau}(\delta)$  の検定曲線および鉛直

方向各点での流向測定結果がそれぞれ図 - 1・3・4 および図 - 1・3・5 に示されている。

図 - 1・3・4 の圧力孔 IV V の検定曲線および図 - 1・3・5 の  $\delta \sim z$  曲線にみられるように，ピトー管莖部の浸水長および流速の違いによって， $\delta$  が著るしく変化しており，圧力均衡点が正しい流向を示さないと考えられる。これを補正するには，各種の水理条件で莖部の浸水長を変えて検定する必要がある。Shukry の測定では，こうした検討がなされてなく，一つの検定曲線を使っているために， $\delta$  の測定値に矛盾した結果がみられる。

以上の原因は，球部の最上部の圧力

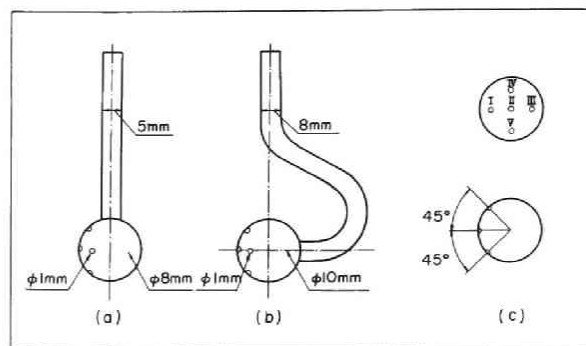


図 - 1・3・3 球型ピトー管

(a) Shukry 型

(b) 改良型

(c) 圧力孔の記号

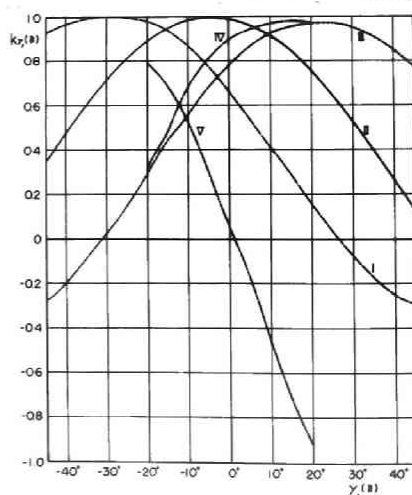


図 - 1・3・4 検定曲線

(Shukry 型)

孔Ⅳ (図-1.3.3(c))に莖部が影響し、圧力特性が変わることによって考えられる。この点を改良するために、図-1.3.3(b)に示すように莖部を曲げ、しかも球部の中心が回転中心となるように改造した。その結果、図-1.3.6 および図-1.3.7にみられるように、水面、底面近傍を除いて良好な結果を得た。しかし、流速によって、多少ピトー管の特性が変わるので、検定曲線を用いる Shukry の方法を採用せずに、各測点で圧力均衡点を求める方法で測定を行なった。

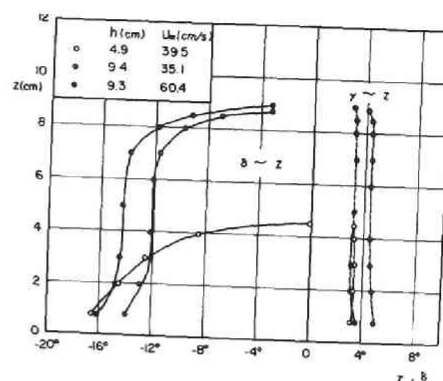


図-1.3.5

直線流での測定例  
(Shukry 型)

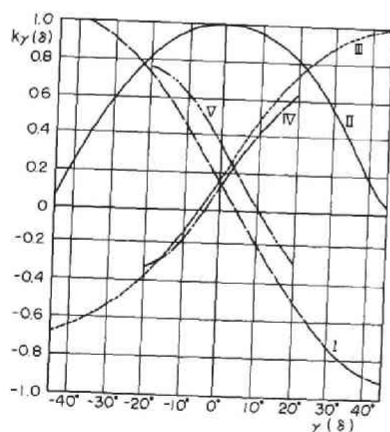


図-1.3.6

検定曲線 (改良型)

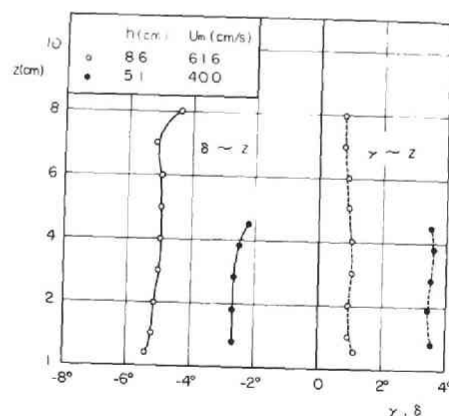


図-1.3.7

直線流での測定例 (改良型)

## (II) 流向測定精度

球型ピトー管による流向測定精度については、製作誤差、流れに対する擾乱など不確定な要素が多く、一方向流での検定も難しいので従来ほとんど吟味されていない。若干の試みとしては、彎曲流中でピトー管による流向測定値と粒子の軌跡あるいは糸の流線とを比較する方法が用いられている。しかし、一定点での比較が難しく、粒子の拡散、糸の動揺の影響も入るので、十分な予測ができないと考えられる。本研究でも円柱型ピトー管の場合について、粒子のストロボ撮影による軌道と比較したが、図-1.3.8にみられるように精度の予測は困難であった。

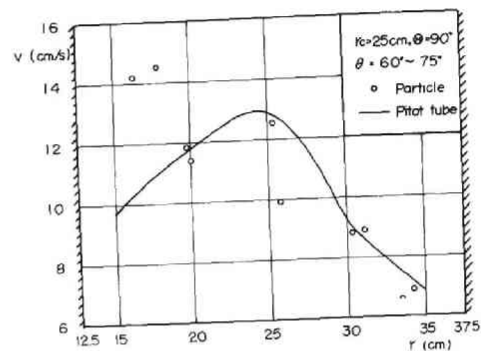


図-1.3.8

円柱型ピトー管と粒子軌道  
による測定値との比較

ここでは、速度こう配の影響と差圧測定の精度の2点から、球型ピトー管の測定精度を考察してみよう。

### (a) 速度こう配の偏角に与える影響

球部の5個の圧力孔について、回転偏角による圧力係数の変化を測定した結果を図示すると図-1.3.9のようになる。この図で、実線はポテンシャル流れにおける球の圧力係数の式

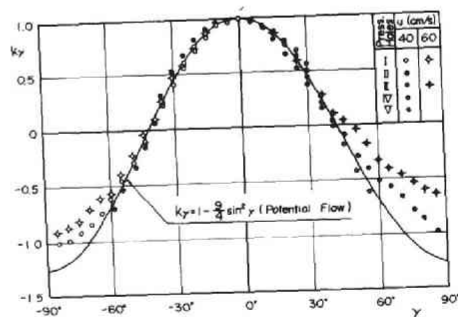


図-1.3.9

ポテンシャル流れとしての球  
の圧力係数と実測値との比較

$$k_{\theta} = \frac{P - P_0}{\rho u^2 / 2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (1.3.1)$$

を表わしている。偏角の大きいところでは、球面から流れがはく離するため (1.3.1) 式の曲線からはなれるが、停留点から圧力孔付近まではほぼ同式で近似できることがわかる。したがって、以下の考察では、ポテンシャル流れとしての近似が成りたつものとして検討する。

いま、二つの圧力孔 (図-1.3.3(c)のⅠとⅢあるいはⅣとⅤ) に作用する平行流の速度および圧力をそれぞれ  $u_1, u_2$ , ( $u_1 < u_2$ ),  $p_1, p_2$  とすると, (1.3.1) 式より  $\theta = 45^\circ$  の場合  $p_1 > p_2$  となる。したがって  $p_1 = p_2$  とする流向測定位置では, 次式で与えられる偏角  $\Delta\theta$  が見掛け上あらわれる。

$$u_1^2 \left\{ 1 - \frac{9}{4} \sin^2 (45^\circ + \Delta\theta) \right\} = u_2^2 \left\{ 1 - \frac{9}{4} \sin^2 (45^\circ - \Delta\theta) \right\}$$

この式を整理すると,

$$\frac{u_2}{u_1} = \sqrt{\frac{2}{1 - 9 \sin 2\Delta\theta} - 1} \quad (1.3.2)$$

となり  $u_1/u_2$  と  $\Delta\theta$  の関係は図-1.3.10 のように表わされる。

本実験の測定範囲では,  $u_2/u_1$  の最大値は 1.05 であって,  $\Delta\theta \div 0.2^\circ$  と考えられる。

#### (b) 差圧測定の精度と偏角の不確定量

いま, 流速  $u$ , 流向  $\theta$  の流れにおける流向測定に, 測定限界  $\Delta h$  の差圧測定器を用いたと考える。この場合,  $\Delta h$  によって生ずる流向測定の不確定量を  $\Delta\theta$  とすると, (1.3.1) 式より

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \left( \frac{u}{\cos\theta} \right)^2 \frac{9}{4} \{ \sin^2 (45^\circ + \Delta\theta) - \sin^2 (45^\circ - \Delta\theta) \}$$

の関係がえられる。上式で、 $\Delta\theta$ を最大とする $\Delta h$ は $\theta=0$ の流れを考えれば充分であるから、この場合、上式は

$$\Delta h = 1.15 \times 10^{-3} u^2 \sin 2\Delta\theta \quad (1.3.3)$$

と表わされる。ただし、 $\text{cm} \cdot \text{sec}$ 単位である。 $\Delta h$ と $\Delta\theta$ の関係を図示すると、図-1.3.11のようになる。

本実験で用いた $30^\circ$ 傾斜マンノメーターでは、およそ $\Delta h = 1/4 \text{ mm}$ の精度であるから、 $u = 30 \sim 70 \text{ cm/sec}$ に対して $\Delta\theta \approx 0.7^\circ \sim 0.1^\circ$ と考えられる。

以上のように、流速が小さい場合、差圧測定による影響が大きく、壁面近くの測定には差圧計の精度を高める必要がある。しかし、本実験で用いた球型ピトー管は直径 $10 \text{ mm}$ であって、底面から $0.8 \text{ cm}$ 以上、側壁から $2 \text{ cm}$ 以内の断面の測定に限っており、傾斜マンノメーターで計測できると考えられる。

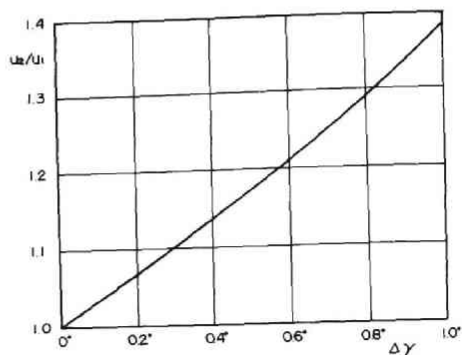


図-1.3.10

速度こう配の偏角に与える影響

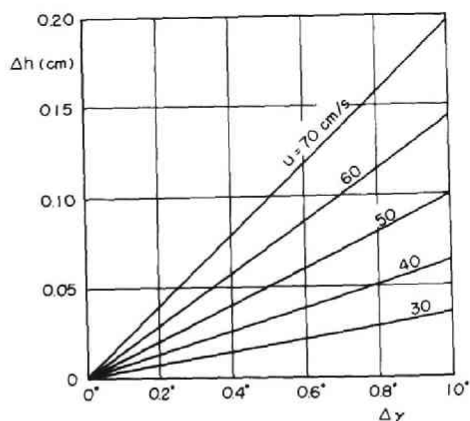


図-1.3.11

差圧測定の精度と流向の不確定量

### (3) 水面形

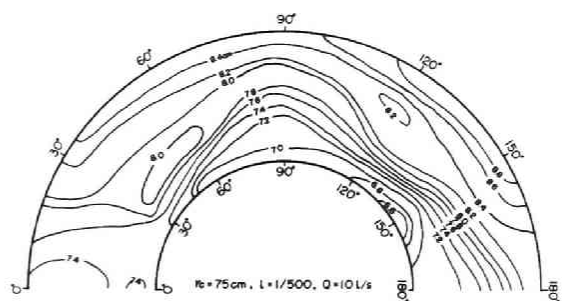
$r_c = 75 \text{ cm}$ ,  $150 \text{ cm}$  の場合について、彎曲部内の等水位線図を

示すと図-1.3.12

のようになる。

モルタル床面の不  
整のために、等水位  
線がやや歪んでいる  
が、 $90^\circ$  彎曲水路  
の実験結果と同様に、  
横断水面こう配は彎  
曲流入点より流出点  
において著るしいこ  
とがわかる。

つぎに、横断水位  
差の変化について、  
前節の (1.2.4)' ,  
(1.2.7)' 式と  
比較した結果が図-  
1.3.13<sup>(a)</sup>に示され  
ている。 $180^\circ$  彎  
曲水路においても、  
彎曲部中央部の水位  
差は理論値より大き  
くなると言えよう。





形の特性について、かなり意見が分かれているが、多くはこうした点に原因かあると考えられる。

#### (4) 流速分布

ここでは、彎曲流における流速特性を各流速成分について検討するとともに、断面内の各測点で求めたエネルギーの値より、エネルギーの遷移特性を明らかにしようと思う。

##### (i) $u$ 分布

##### 1) $u$ の $r$ 方向の分布

：図 - 1・3・14 は  $z = 3\text{cm}$  の面で  $u \sim r$  の関係が主流方向にどのように変化するかを示したものである。同図には、比較のために  $u = \text{一定}$ 、 $u \sim r$  の分布が鎖線、破線で描かれている。

この図より、 $u$  の  $r$  方

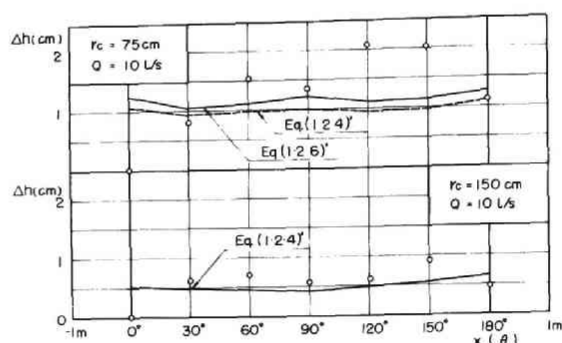


図 - 1・3・13 (a)

水位差の変化と計算値との比較

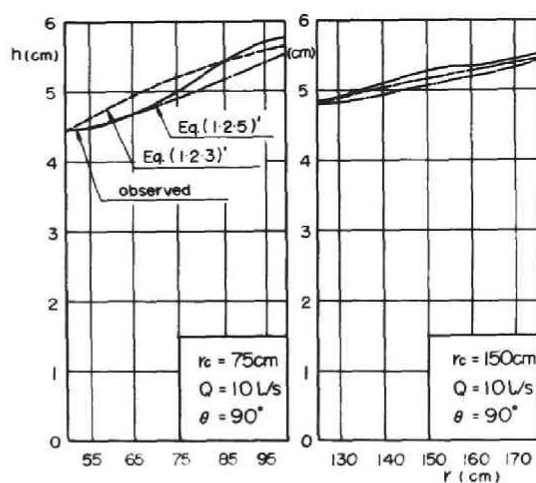


図 - 1・3・13 (b)

横断水面形と理論式との比較

向の分布は $u = \text{一定}$ から  
 $\partial(u r) / \partial r = 0$ を経て  
 $\partial(u r) / \partial r > 0$ へ移行  
 行していく過程が把握で  
 きよう。 $r_c = 75 \text{ cm}$ の場  
 合は流出点まで $u r$ の変  
 化が続き、 $r_c = 150 \text{ cm}$   
 では $\theta = 120^\circ$ 以降で  
 一定になり、 $u \sim r$ 分布  
 に近い特性を示している  
 ようにみえる。

## 2) $u$ の $z$ 方向の分布

：図-1.3.15 は  $r = r_c$  にそって  $u \sim \ln z$  の  
 主流方向の変化を示した  
 ものである。 $u \sim \ln z$  の  
 関係は彎曲部内でもほぼ  
 直線的であるが、彎曲部  
 後半で、 $u$  が鉛直方向に  
 著るしく一様化している  
 のが注目される。また、  
 下流直線部では、次第に  
 こう配が増し、上流直線  
 部の分布に恢復する傾向  
 が把握できる。こうした  
 特性は  $r_c = 75 \text{ cm}$ 、

150 cm で共通している。

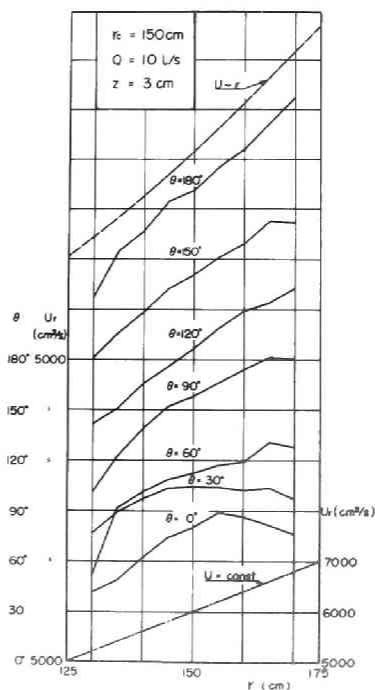
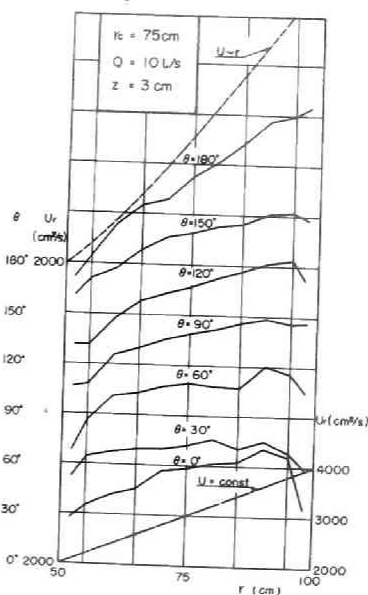


図-1.3.14  $u r \sim r$  の関係

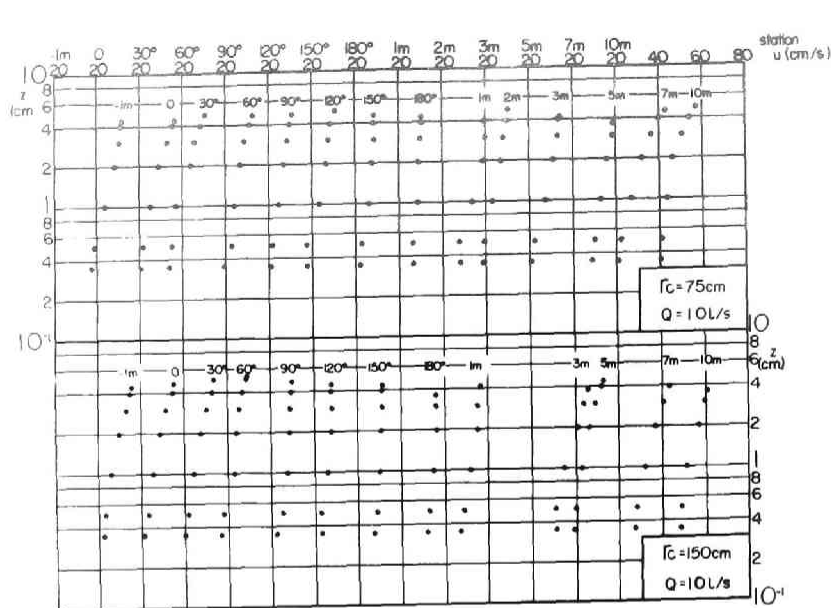
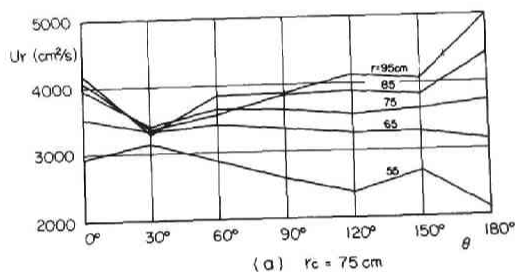


図 - 1.3.15  $u \sim \ln z$  の関係

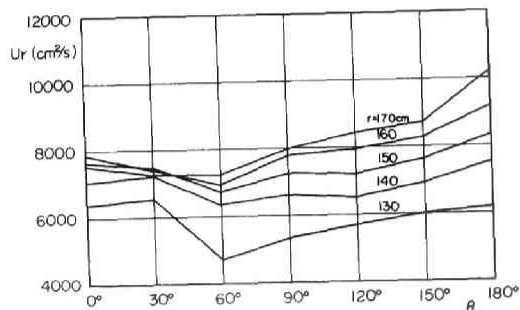
が、特に後者で顕著にうかがえる。

3)  $u$  の  $\theta$  方向の分布：

図 - 1.3.16 は  $z = 3\text{cm}$  の面で  $u_r \sim \theta$  の変化を  $r$  をパラメーターとして示したものである。この図より、1) に述べた  $u = \text{一定}$  から  $\partial(u_r)/\partial r > 0$  に至る過程がどのようにして進行するかを把握できる。すなわち、内岸近くでは  $u_r$  が  $\theta = 0 \sim 30^\circ$  の間で一度



(a)  $r_c = 75\text{ cm}$



(b)  $r_c = 150\text{ cm}$

図 - 1.3.16  $u_r \sim r\theta$  の関係

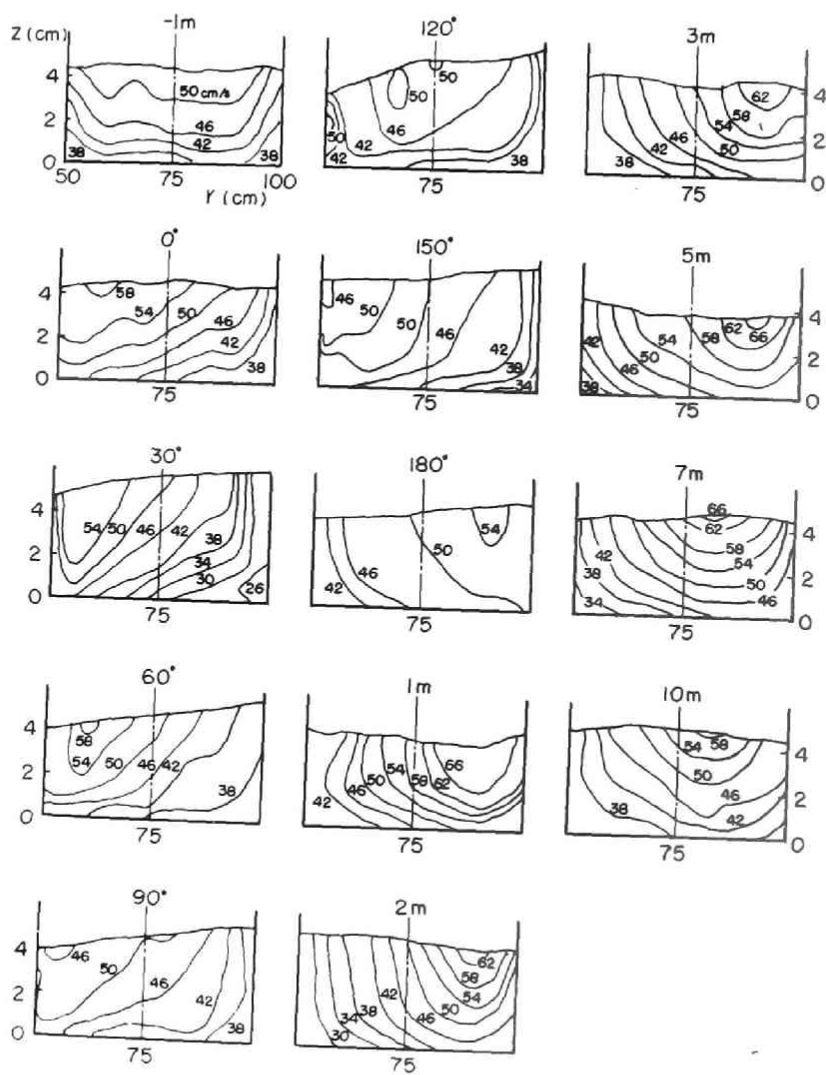


図 - 1.3.17(a)  $u$  の等流速線図 ( $r_c = 75 \text{ cm}$ ,  $Q = 10 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ )

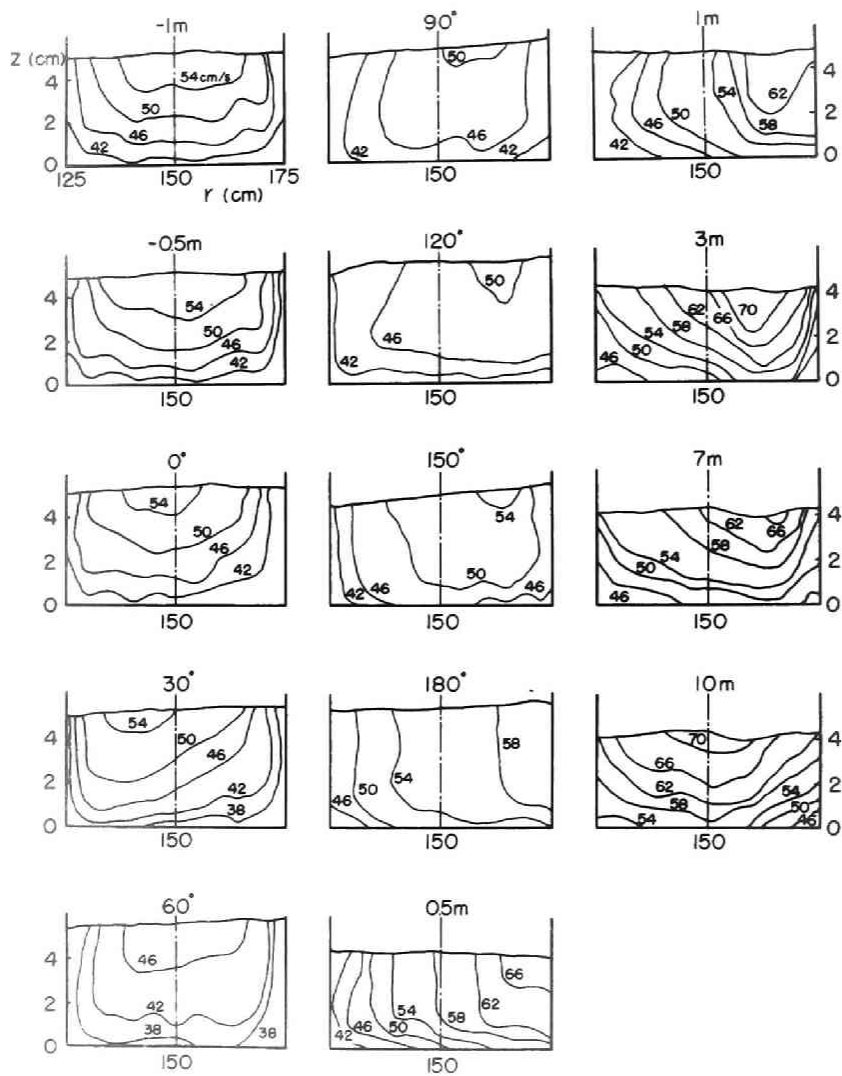


図 - 1.3.17 (b)  $u$  の等流速線図 ( $r_c = 150\text{cm}$ ,  $Q = 10\text{ l/s}$ )

増加した後、減少する。一方、外岸近くでは、これと丁度逆の過程をたどっており、 $\theta \doteq 30^\circ$  で  $u_r =$  一定になる。とくに、 $r_c = 75\text{cm}$  の場合で、こうした角運動量の移送過程が明確である。

以上、主流成分の変化を三方向に分けて断片的に述べたが、流水断面全体についての流速変化の様相を把握するために、等流速線図を示すと図 - 1・3・17(a), (b) のようになる。

この図から、最大流速が移行していく過程および等流速線の密度が変化していく過程を把握することができよう。 $r_c = 75\text{cm}$  と  $150\text{cm}$  の場合とでは、彎曲部内における最大流速点の位置が異なるが、下流直線部では、対応した過程をたどり  $10\text{m}$  の点ではほぼ対称分布になっている。

#### (ii) $v$ 分布

$r_c = 75\text{cm}$ ,  $150\text{cm}$  の場合について、 $v$  の等流速線図を示すと、それぞれ図 - 1・3・18(a), (b) のようになる。

$v$  の  $r$  方向の分布は  $u$  分布のように顕著な特性を示さないが、彎曲部後半で、 $\partial v / \partial r < 0$  となる傾向がやや強まるといえよう。

$v$  の  $z$  方向の分布は  $z/h = 0.3 \sim 0.5$  を境界として向きが変り、上層付近で、 $u$  分布と同様に、彎曲部後半で流下方向に一様化する傾向がみられる。

#### (iii) $w$ 分布

$w$  成分の等流速線を示すと図 - 1・3・19(a), (b) のようになる。

$w$  の分布は、彎曲部前半 ( $\theta = 0 \sim 60^\circ$ ) では、内岸よりに  $w > 0$ 、外岸よりに  $w < 0$  の傾向がみられるが、彎曲部後半では一定の傾向を示さない。流水断面の中央部 ( $|r - r_c| \leq 15\text{cm}$ ) における  $w$  の値は、 $u$ ,  $v$  の値に比して小さく、平均流としては無視できる。

#### (iv) エネルギー分布

流水断面内で、単位体積の流体のもつ全エネルギーは、圧力に静水圧分布を仮定すると、

$$E = \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \rho gh$$

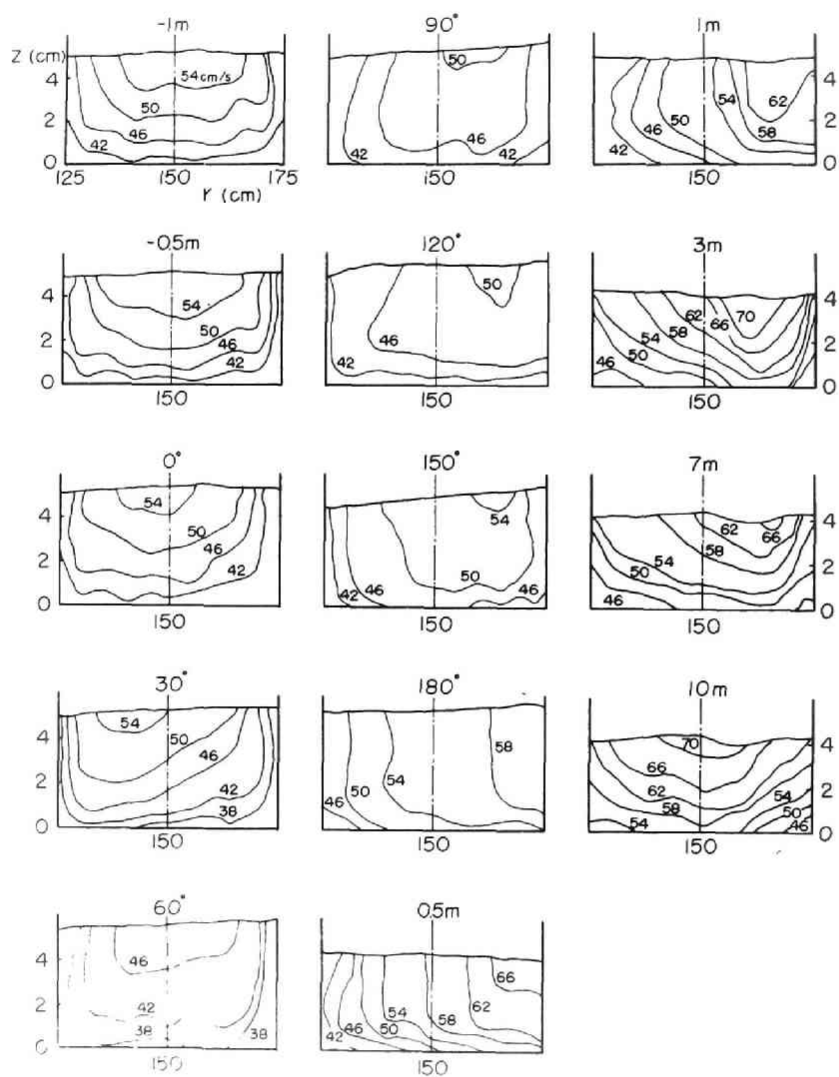


図 - 1.3.18(a)  $V$  の等流速線図 ( $r_c = 75\text{ cm}$ ,  $Q = 10 \text{ l/s}$ )

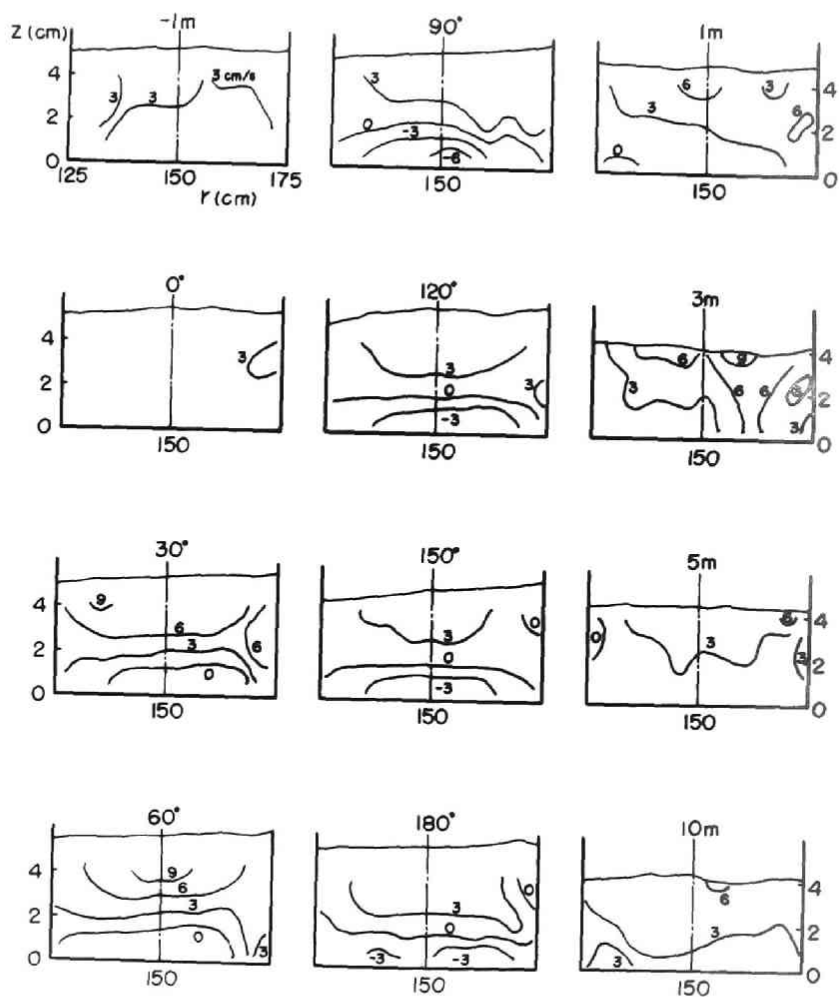


図 - 1.3.18(b)  $v$  の等流速線図 ( $r_c = 150\text{ cm}$ ,  $Q = 10\text{ l/s}$ )



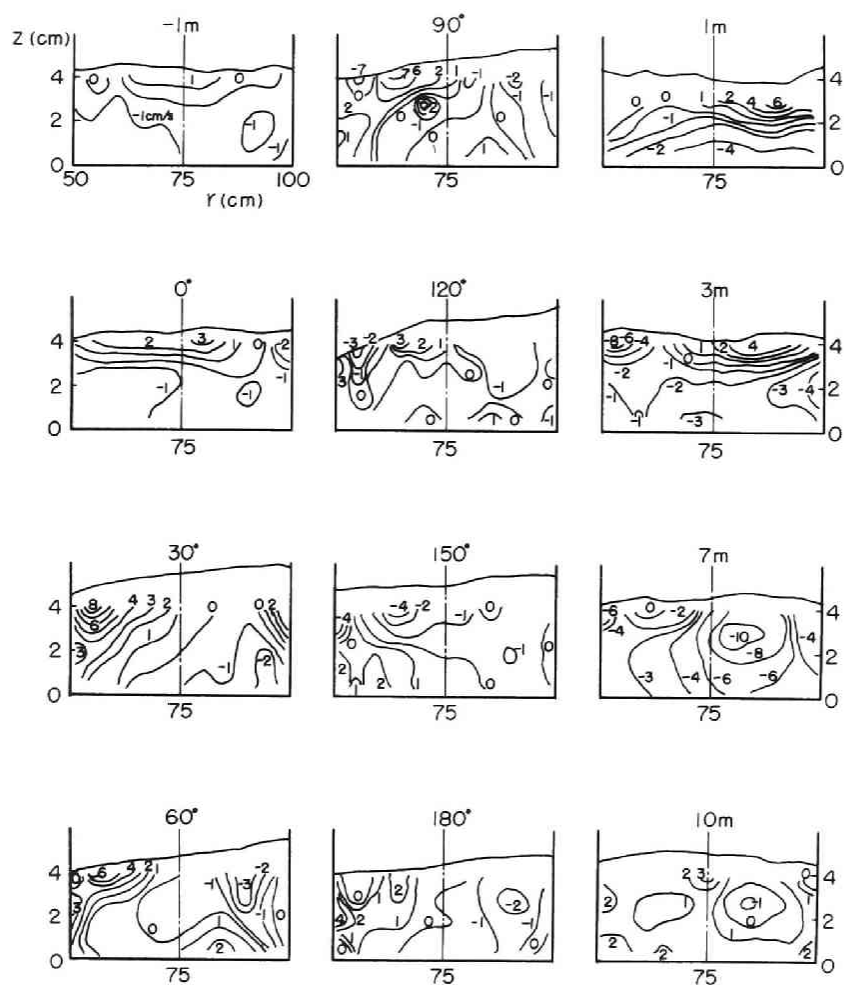


図 - 1.3.19(a)  $\omega$  の等流速線図 ( $r_c = 75\text{cm}$ ,  $Q = 10\text{ l/s}$ )

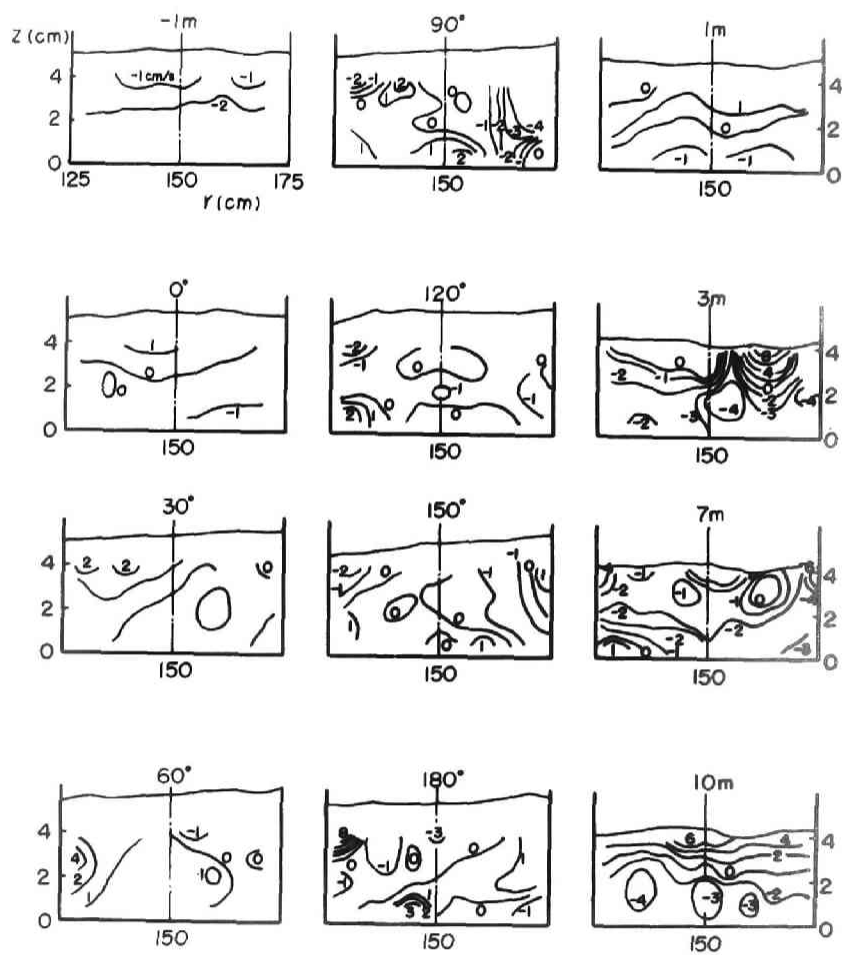


図 - 1 . 3 . 19(b)  $\omega$  の等流速線図 ( $\tau_c = 150 \text{ cm}$ ,  $Q = 10 \text{ } \ell_s$ )

で表わされる。

図-1.3.20はそれぞれ  $r_c = 75\text{cm}$ ,  $150\text{cm}$  で  $r$  一定の線に沿った全エネルギーの変化を示したものである。これらの図より、一般に、内岸近くではエネルギーが減少し、外岸よりで増大することがわかる。 $r_c = 75\text{cm}$  の場合は、外岸近くで摩擦損失を上まわったエネルギー増加を生じており、 $r_c = 150\text{cm}$  の場合では、損失エネルギーとほぼ均衡し、見掛上、エネルギー一定となつている。

こうした過程を総観するために、各断面についての等エネルギー線を示すと図-1.3.21(a), (b)のようになる。

等エネルギー線は直線部および彎曲部前半では水平状態に近く、彎曲部後半では鉛直状態に近くなり、彎曲部内でエネルギー面が  $90^\circ$  回転しているのがわかる。

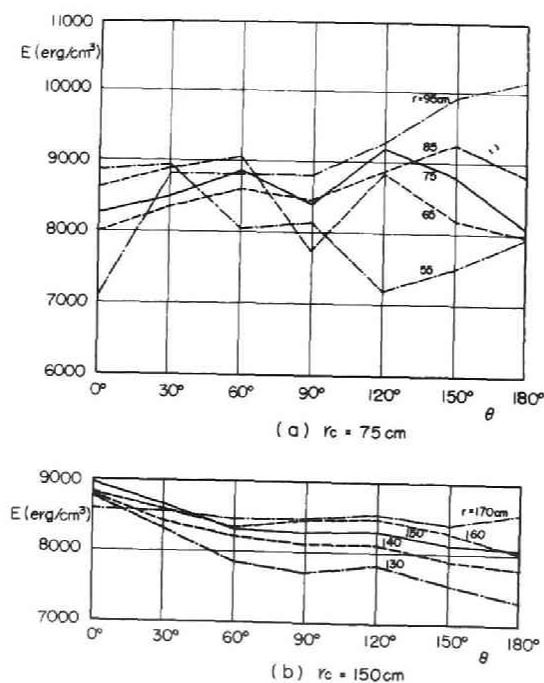


図-1.3.20 全エネルギーの主流方向の変化

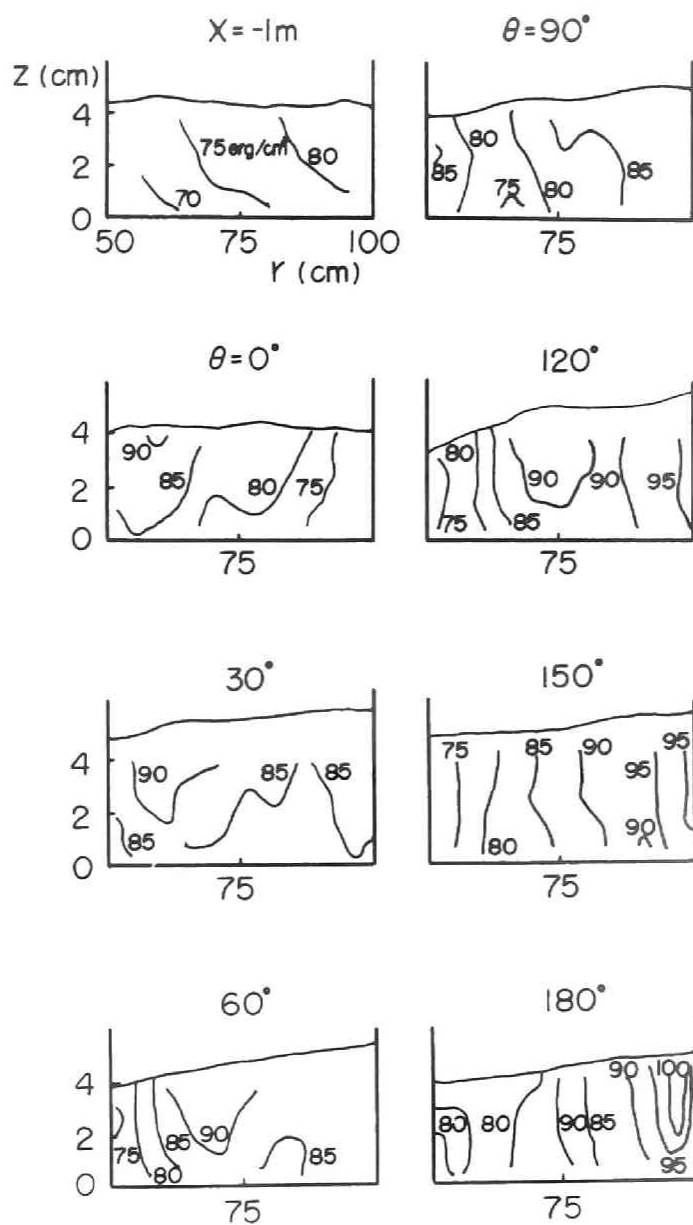


図 - 1.3.21 (a) 等エネルギー線 ( $r_0 = 75 \text{ cm}$ ,  $Q = 10 \text{ l/s}$ )

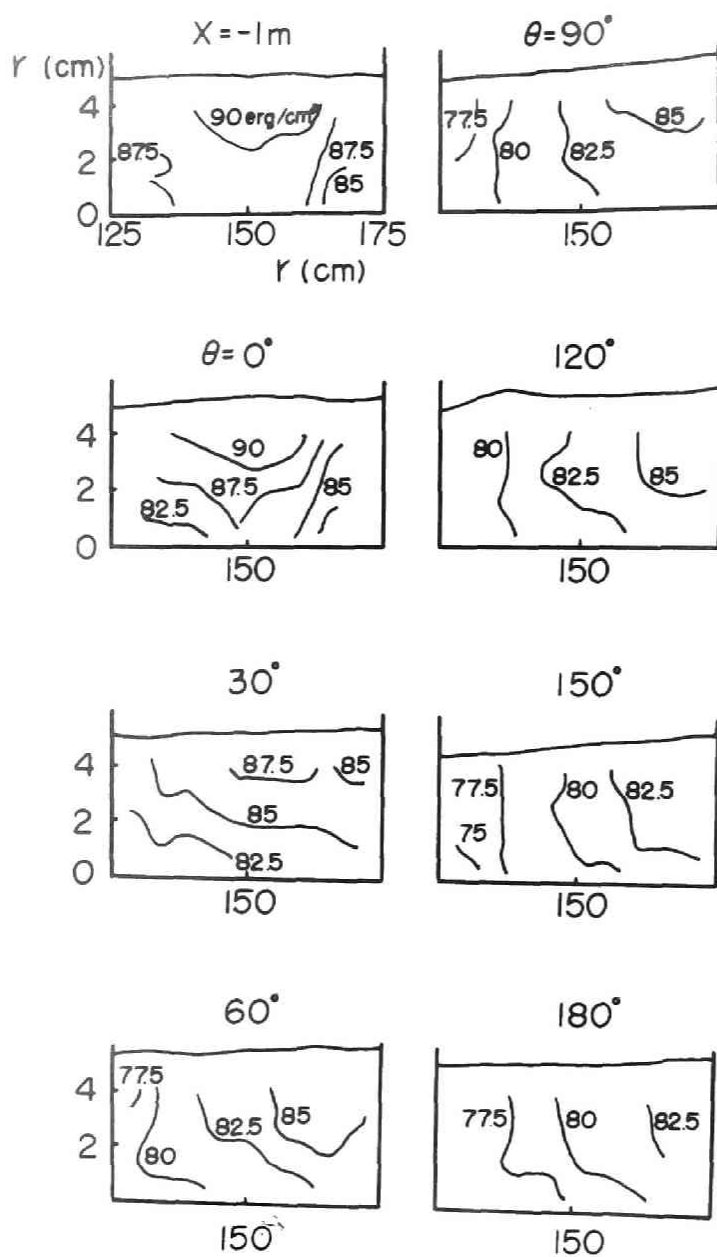


図 - 1.3.21 (b) 等エネルギー線 ( $r_c = 150 \text{ cm}$ ,  $Q = 10 \frac{\text{erg}}{\text{s}}$ )

## 第 4 節 結 言

以上、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$  彎曲水路において実験的研究を行ない、開水路彎曲流の水面形、流速特性を詳細に検討するとともに、従来の研究の問題点を指摘した。

まず、 $90^\circ$  彎曲水路の実験では、主に、横断水面形および断面平均エネルギーの特性について検討を加えたが、その結果を要約するとつぎのようである。

1) 常流状態で、はく離を生じない彎曲流の最大水位差は自由渦の流速分布の仮定にもとづく理論式、(1・2・4)'式よりも大きい値を示し、その差は平均10%、最大25%にも達する。その理由として、Ippen, Drinker による仮定、(1・2・8)式の不合理性および二次流の影響が考えられる。

2) 最大水位差を生ずる断面における横断水面形は曲率半径の小さい ( $r_c/B = 1$ ) 場合には、自由渦に類似した凸水面形をなし、流速分布もほぼ対応する。

3) 彎曲部におけるエネルギー損失の算定の基準はMüllerの定義するようには明確でない。本実験の場合、背水曲線を基準とする便法を用いた結果、損失係数はRaiju, Shukry の値より大きく、Reynolds 数の増加とともに著るしく減少する傾向を示した。(図-1・2・12(c))

4) 彎曲流の運動量補正係数 $\beta$ 、エネルギー補正係数 $\alpha$ の値は、曲率半径最小の場合 ( $r_c/B = 1$ ) においても $\alpha = 1.23$ 、 $\beta = 1.08$ であって、一般に直線流の値 $\alpha = 1.10 \sim 1.20$ 、 $\beta = 1.03 \sim 1.07$ で近似できる。(表-1・2・2)

5) 横断方向の水深、流速の変化によるエネルギー補正係数 $\alpha_1$ および二次流の影響を考慮した補正係数 $\alpha_2$ は $r_c/B = 1$ より大きい場合は、 $\alpha_1 = 1$ 、

$\alpha_2 = \alpha$  で近似できる。(表-1・2・3)

一方、 $180^\circ$  彎曲水路の実験では、主に、球型ピトー管による流向測定法の吟味と彎曲流における各流速成分の特性の検討を行ない、つぎの点を明らかにした。

1) Shukry の用いた球型ピトー管で莖部を水平にすることによって、鉛直面内の流向測定に対する自由表面の影響を除くことができる。しかし、底面から  $0.8\text{ cm}$ 、水面下  $1\text{ cm}$  以内では、なお圧力孔の特性が変化するので、境界面近傍の測定には限界がある。

2) 流向測定精度について、流れの速度こう配、差圧測定精度の2点から検討した結果、後者の影響が大きく、本実験の場合、最大  $0.7^\circ$  と推定される。

3) 彎曲流における流速特性は、彎曲部内で  $u$  が内岸から外岸へ遷移する半径方向の変化が最も顕著であるが、鉛直方向に  $u$ 、 $v$  が均一化する傾向もかなり明瞭に観察できる。 $w$  の分布は彎曲部前半の内岸、外岸近くでそれぞれ上昇、下降の特性を示すが、後半部では一定の傾向がなく、断面中央部 ( $|r - r_c| \leq 1.5\text{ cm}$ ) では、 $u$ 、 $v$  に対して無視できる。

## 参 考 文 献

- 1) Rozovskii, I. L. : Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Science of the Ukrainian SSR, (1957) .
- 2) Ben-Chie-Yen : Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel, Report of Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, (1965) .
- 3) Mockmore, C. A. : Flow around Bends in Stable Channels, Trans. A S C E, vol. 109. (1944) .
- 4) Shukry, A. : Flow around Bends in an Open Flume, Trans. A S C E, Vol. 115, (1950) .
- 5) Einstein, H. A. and Harder, J. A. : Velocity Distribution and the Boundary Layer at Channel Bends, Trans. A G U, Vol. 35, No. 1, (1954) .
- 6) Ippen, A. T. and Drinker, P. A. : Boundary Shear Stresses in Curved Trapezoidal Channels, Proc. A S C E, Vol. 88, No. HY 5, (1962) .
- 7) 本間仁 : 水理学, 丸善出版, P. P. 167-170 (1952)
- 8) 岸 力, 小川芳昭 : 開水路彎曲流の二次流に関する研究, 土木学会第7回年次学術講演会講演概要, P. P. 71-76 (1962)
- 9) 吉川秀夫, 須賀堯三, : 開水路彎曲によるエネルギー損失について, 土木学会第19回年次学術講演会講演概要 P. P. 21-1-2 (1964)



- 10) 沼知福三郎：水流の速さ，方向及び静圧を測定しうる円筒型ピトー管，  
機械学会誌，第34巻，第171号（1930）
- 11) Müller, R. : Theoretische Grundlagen der Fluss und  
Wildbachverbaugen, MVWE, No. 4, (1943) .
- 12) Raiju, S. P. : Resistance to Flow in Curved Open  
Channels, Proc. ASCE, Vol. 63, (1937) .
- 13) Y.Muramoto : Flow through curved Open Channels,  
Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute,  
Vol.14, Part 2, (1965).
- 14) 村本嘉雄，井上喬之：開水路彎曲流の内部機構，京都大学防災研究所  
年報，第8号，415-427 (1965)

## 第2章 開水路彎曲流の渦度の特性と領域区分<sup>①</sup>

### 第1節 概 説

開水路彎曲部における流れの内部機構は、平均流の特性に限定しても、前章の流速分布の測定結果にみられるように、顕著な三次元的特性を示しており、直線流から彎曲流への遷移過程を連続的に記述することは極めて難しいと考えられる。

従来より、彎曲流に対する理論的な研究としては、Navier — Stokes の式あるいは Reynolds 表示による同式と連続式とを連立させて近似的に解く試みがなされている。しかし、その多くは、主流方向に変化のない彎曲流の取り扱いに限定されていて、実際現象との対応および適用範囲も十分に把握されていない。

一方、実験的研究においても、主流成分の流速測定に限られている場合が多いので、彎曲部における流れの遷移過程は、単に「自由渦の特性から強制渦の特性に変化する」と表現されており、二次流を含めた彎曲流の運動機構の把握および理論的解析に対する明確な方向づけがなされていない。

本章では、回転流としての彎曲流の特性に着目し、前章で述べた各流速成分の特性を総括的に把握するために、水路の断面スケールの渦度成分を流速測定値より求め、それが主流方向にどのように変化するかを検討する。その結果にもとづいて、彎曲流の遷移過程に領域区分を与え、各領域の特性を明らかにするとともに解析の方向について述べる。また、水理条件、境界条件の異なる若干の実験結果から領域区分を再検討し、各領域の範囲を規定する要素について吟味する。

## 第2節 渦度成分の検討と領域区分

### (1) 渦度分布の検討

彎曲部の流れにおける各渦度成分は図-2.2.1(a)に示すような円筒座標系を用いると、 $(\theta, r, z)$  方向に対して、

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) \quad (2.2.1)$$

で与えられる。また、上、下流直線部に対しては、図2.2.2(b)の直交座標系を考えると、

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.2.2)$$

で表わされる。

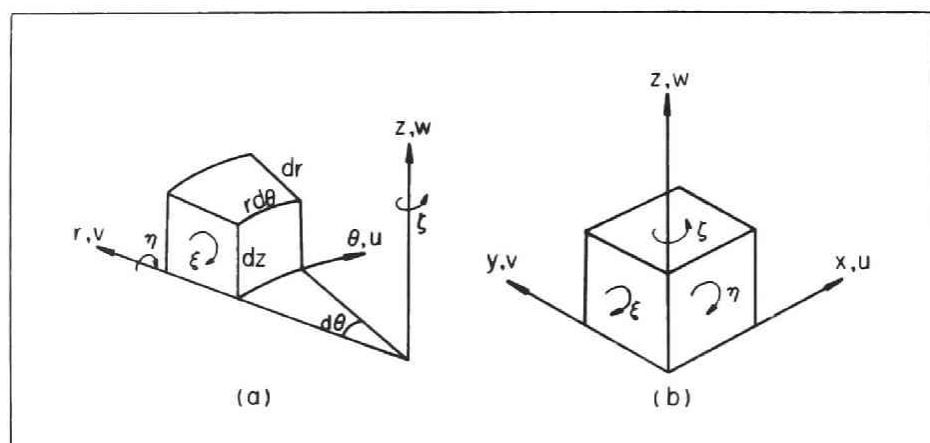


図-2.2.1 座標系と渦度成分

一般に、(2.2.1) および (2.2.2) 式の各渦度成分は、流水断面内の各で変化するが、上流直線部で側壁のせん断応力の影響の小さい断面を考え、線部の流れを一つの渦度  $(0, \eta_\zeta, 0)$  で代表させる。彎曲部内では、同一断

の固定流管を考え、その内部で各渦度成分が主流方向にどのように変化していくかを、実験値より検討してみよう。

まず、充分長い彎曲流の遷移過程を検討するために、第1章第3節で述べた  $180^\circ$  彎曲水路の実験値を整理する。

渦度を計算する代表断面としては、 $|r_c - r| \leq 15 \text{ cm}$ ,  $Z = 0.8 \sim 3.8 \text{ cm}$  の長方形断面を考え、(2.2.1), (2.2.2) 式の差分式および流速成分の測定結果にもとづいて渦度成分を求める。しかし第1章第3節(4)の流速分布の検討から分るように、 $w$  分布は  $|r_c - r| \leq 15 \text{ cm}$  の範囲では、無視できるので、つぎの近似式によつて計算する。

$$\xi = -\frac{\Delta v}{\Delta Z}, \quad \eta = \frac{\Delta u}{\Delta Z}, \quad \zeta = \frac{\Delta v}{r_c \Delta \theta} - \frac{1}{r_c} \frac{\Delta}{\Delta r}(ur) \quad (2.2.3)$$

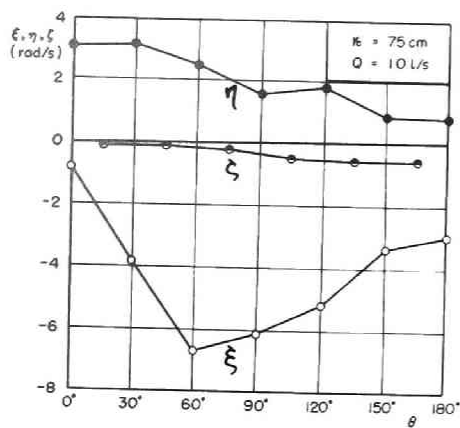
$$r_c \Delta \theta = r_c \frac{\pi}{6}, \quad \Delta r = 30 \text{ cm}, \quad \Delta Z = 3 \text{ cm}$$

いま、 $r_c = 75 \text{ cm}$ ,  $150 \text{ cm}$  の場合について、渦度成分の主流方向の変化を図示すると、図-2.2.2(a), (b) のようになる。

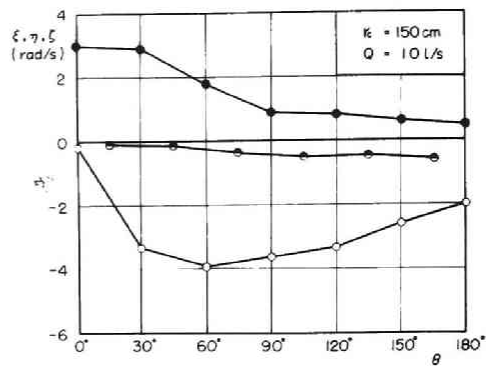
各渦度成分の流れ方向の変化は、上の二つで多少異なるが、つぎのような共通の傾向がうかがえる。

- 1)  $\xi$  は上流方向をもち彎曲部内で流入点より次第に増加し、 $\theta = 60^\circ$  で最大となり、以後次第に減少していく。
- 2)  $\eta$  は外岸の方向をもち、 $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$  付近まで直線部と同じ値 ( $\eta_s$ ) を保ち、以後次第に減衰していく。
- 3)  $\zeta$  は鉛直下方向をもち、 $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$  付近まで0で、以下次第に発達していく。

つぎに、こうした代表断面における粗視的な渦度の変化が断面内の局所的な渦度変化とどの程度対応するかを  $r_c = 75 \text{ cm}$  の場合について若干検討してみよう。

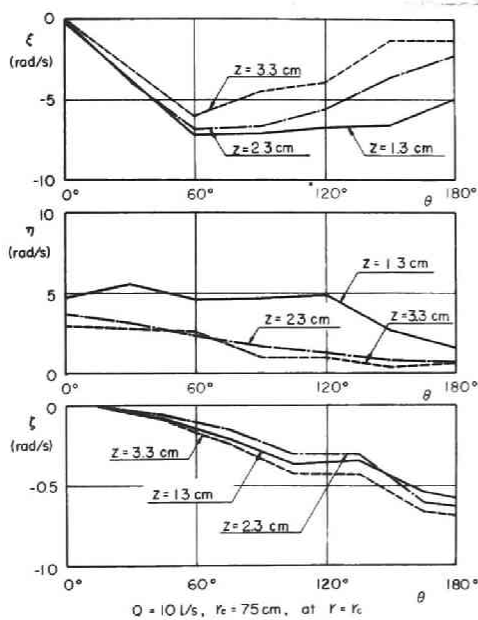


(a)

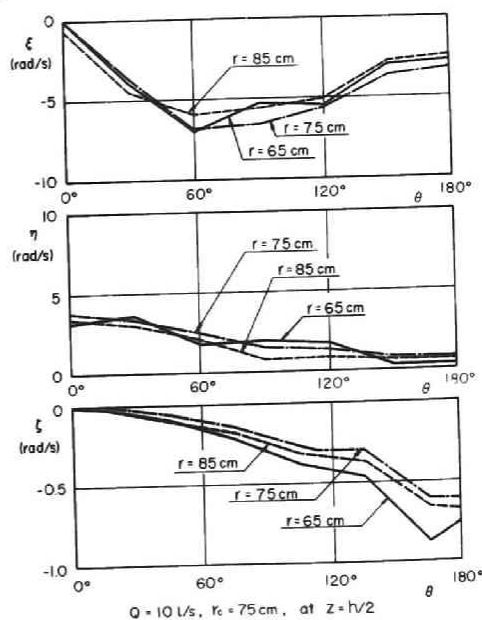


(b)

図-2.2.2 断面スケールの渦度分布



(a)



(b)

図-2.2.3 (a) (b)局所的な渦度分布

図-2.2.3(a)は $z$ 方向に異なる三点の水路中心線に沿った渦度分布を示しており、図-2.2.3(b)は $z = h/2$ 面上で $y$ 方向に異なる三点の渦度の変化を示したものである。

ただし、渦度の算定は、測点間隔に制約され  $\Delta r = 10\text{cm}$   $\Delta z = 1\text{cm}$   $\Delta \theta = 40^\circ$  にとっている。

図-2.2.3(a)の底面近くの測定値( $z = 1.3\text{cm}$ )では、 $\xi$ が一様化する区間( $\theta = 60^\circ \sim 150^\circ$ )があらはれており、 $z = z_s$ の区間も $\theta = 0 \sim 120^\circ$ におよんでいるなど底面摩擦の影響がみられる。しかし、図-2.2.3(b)では、内、外岸の差は明確でなく、大局的には図-2.2.2(a)と同じ傾向を示していると考えられる。

## (2) 領域区分

彎曲流の遷移過程は上述の渦度分布によつて、かなり、明確に把握できる。

いま彎曲部で壁面近くを除く断面内の渦度分布を前項の実験値を参考にしさらに極限状態を考えて模型的に示すと、図-2.2.4(a)のようになる。

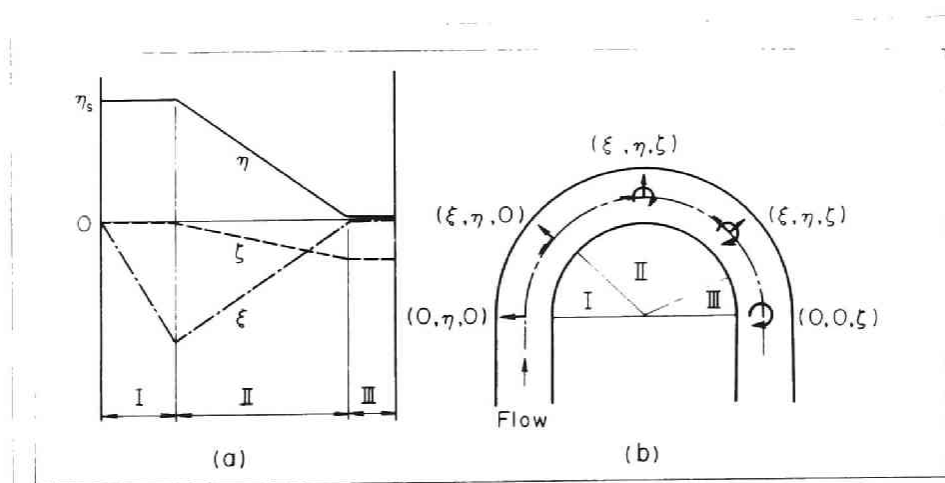


図-2.2.4 渦度分布の模型図と領域区分

結局、彎曲部内の流れは図-2.2.4 (b)に示すように、各渦度成分の存在によつて、Ⅰ：二次元回転流域、Ⅱ：三次元回転流域、Ⅲ：一次元回転流域の三領域に分けることができる。

いま各領域を二次流 ( $\zeta$  成分) の発達過程より考えて、Ⅰ：発生域、Ⅱ：発達域、Ⅲ：完全発達域と名づけることにする。

これらの各領域の特性を前章3節(4)で述べた流速特性を加味して述べると、つぎのようになる。

(Ⅰ)発生域： この領域では、 $\eta \div \eta_s$  ,  $\zeta = 0$ であるから、主流成分を含む渦度は直線流としての渦度に類似しており、 $(\theta, r)$  面では平行流あるいはポテンシャル流としての性質を保持している。したがつて、二次流 ( $\zeta$ ) は直線流の渦度がポテンシャル流としての主流によつて、引伸ばされ、変形する過程で発生すると考えることができる。こうした二次流の発生機構の概念は、次章で詳述するように、H・B・SquireおよびK・G・Winter<sup>2)</sup>によつて最初に与えられ、考察が展開されている。

一方主流の流速特性から考えると、一樣流速から内岸の流速が増大し、自由渦に類似した分布を保持する領域に相当する。

(Ⅱ)発達域： 二次流の影響が主流におよび、 $\eta$ が減少し、新たに $\zeta$ が発生する。また、こうした主流成分の渦度の変化が二次流に影響を与え、 $\zeta$ を減少させる相互干渉の領域と考えられる。

主流の流速特性から言えば、最大流速が内岸から外岸へ移行する過程であつて、鉛直方向の流速分布のこう配が二次流の影響を受けて、直線流のそれより減ずる領域に担当する。

(Ⅲ)完全発達域： 主流と二次流の相互作用が平衡状態に達し、壁面近くを除く断面の主要部で $\zeta$ 、 $\eta$ が0となり、 $\zeta$ だけが存在する領域である。したがつて、この部分を上層とし、鉛直方向の速度こう配の存在する底面近くを下層として、境界層概念による近似が可能と考えられる。しかし、この場合上層が回転流としての特性を持つことが、通常の境界層と異つている。

### 第3節 領域区分の検討

前節で述べた各領域の特性および各領域の範囲が水理条件の違いによつてどのように異なるかを若干の実験値より検討してみよう。

実験値の諸条件は表-2・3・1に示すようである。ただし、 $h_i$ ,  $Fr_c$  は彎曲部流入点での水深およびFroude数を表わしている。

表-2・3・1では、第1章で述べた実験-I-1、I-2、II-1、II-3の他に、つぎの実験が加わっている。

(i) 180°彎曲水路で路床こう配1/200とし、射流状態で行つた実験-II-2、II-4

(ii) 90°彎曲水路(水路巾50cm)で粗度を変化させた実験-III-1、III-2

前節で同様の手法で、彎曲部および上、下流直線部の渦度成分を計算し、水路中心線に沿つた変化を図示すると、図-2・3・1(a)~(e)のようになる。

これらの図より上流直線部、彎曲部、下流直線部の各区分における渦度の特性を検討するとつぎのことがいえよう。

1) 上流直線部における渦度は、二次流の発生が急激なI-1の場合(図-2・3・1(a))でも上流25cmでその影響が消えており、普通、二次流は彎曲部流入点の極く近傍から発生するものと考えられる。

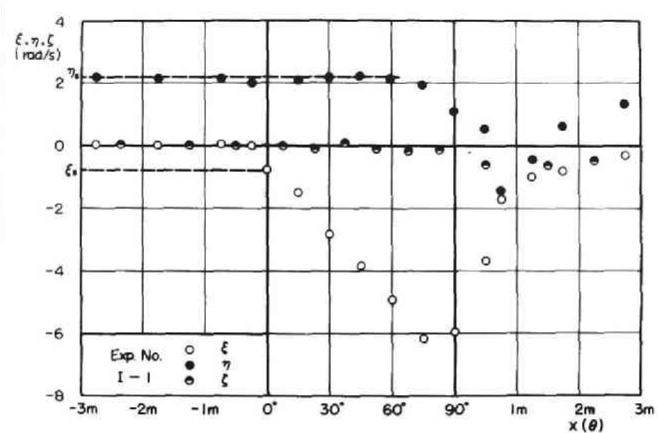
2) 彎曲部内では、すべての実験ケースで発生域および発達域が認められるが、完全発達域は明確ではない。

3) 下流直線部における渦度は、上流直線部に比して彎曲部の影響範囲が広く、2~4mにおよんでおり、多くは $\xi \sim 0$ 、 $\eta \sim \eta_s$ 、 $\zeta \sim 0$ へかい復する。しかし、偏角が小さく、曲率が大きいI-1の場合では、流出点付近でも $\eta$ が減少し、 $\zeta$ が発達しており、発達域の特性を保持している。

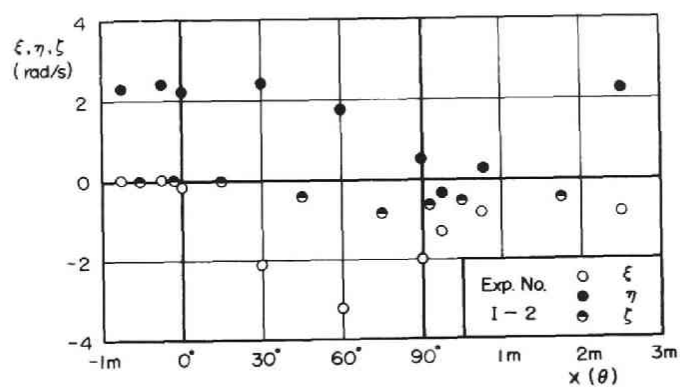


| 実験<br>番号 | 水路材料<br>(粗度係数)            | 彎曲全<br>偏角(度)<br>④ | 水路巾<br>B (cm) | 中心曲<br>率半径<br>$r_c$ (cm) | $r_c/B$ | 路床こう配<br>i | 流 量<br>( $l/s$ ) | 水 深<br>$h_i$ (cm) | $B/h_i$ | $F_{ri}$ | $Re$<br>( $10^4$ ) |
|----------|---------------------------|-------------------|---------------|--------------------------|---------|------------|------------------|-------------------|---------|----------|--------------------|
| I-1      | 塩化ビニール                    | 90                | 25            | 25                       | 1       | 1/500      | 8.25             | 8.6               | 2.9     | 0.43     | 2.78               |
| I-2      | ( $n=0.00986$ )           | "                 | "             | 75                       | 3       | "          | "                | 7.3               | 3.4     | 0.56     | 2.64               |
| II-1     | コンクリート<br>( $n=0.0134$ )  | 180<br>"          | 50            | 75                       | 1.5     | 1/500      | 10.0             | 5.1               | 9.8     | 0.55     | 1.75               |
| II-2     | "                         | "                 | "             | "                        | "       | 1/200      | 25.0             | 6.0               | 8.3     | 1.08     | 3.82               |
| II-3     | "                         | "                 | "             | 150                      | 3       | 1/500      | 10.0             | 5.5               | 9.1     | 0.50     | 1.75               |
| II-4     | "                         | "                 | "             | "                        | "       | 1/200      | 20.0             | 4.8               | 10.4    | 1.21     | 3.06               |
| III-1    | 塩化ビニール<br>( $n=0.00986$ ) | 90                | 50            | 150                      | 3       | 1/500      | 10.0             | 4.9               | 10.2    | 0.58     | 2.49               |
| III-2    | 砂粒粗面<br>( $n=0.0160$ )    | "                 | "             | "                        | "       | "          | "                | 6.4               | 7.8     | 0.39     | 2.28               |

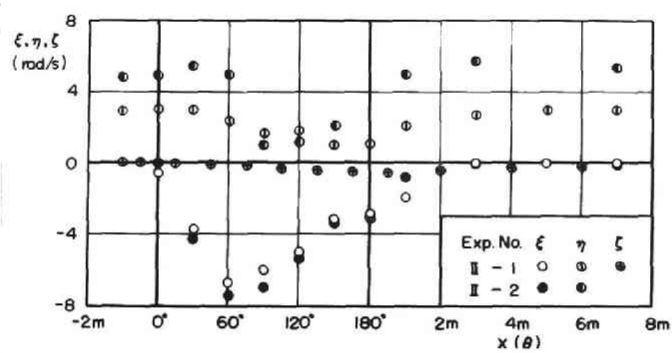
表-2.3.1 実験条件



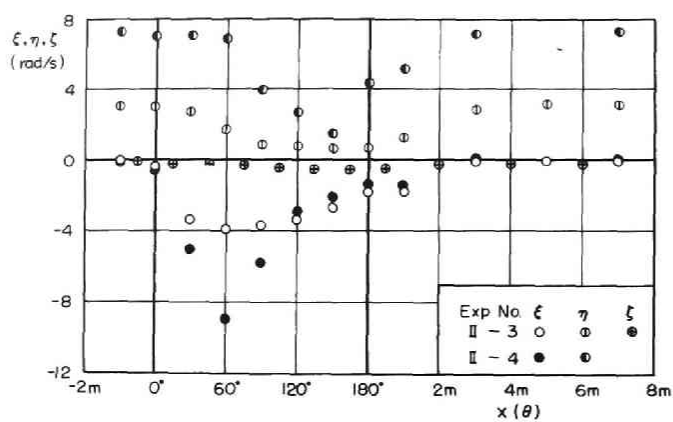
( a ) ( I - 1 )



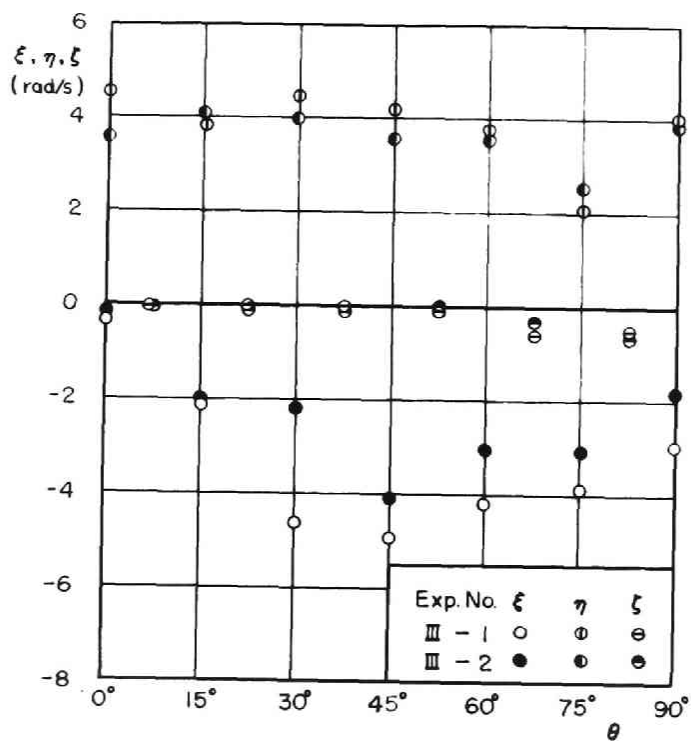
( b ) ( I - 2 )



( c ) ( II - 1, II - 2 )



(d) (II-3, II-4)



(e) (III-1, III-2)

图-2.3.1 (a)~(e) 渦度分布

一方、領域区分に対する諸要素の影響を検討すると、つぎのようである。

1)  $Fr$  数の影響： 図-2.3.1(c)のⅡ-1、( $Fr = 0.55$ )とⅡ-2 ( $Fr = 1.08$ )の比較および図-2.3.1(d)のⅡ-3 ( $Fr = 0.50$ )との比較からわかるように、 $Fr$  数の増加によつて、 $\xi$  の絶対値は増加しているが、発生域、発達域の範囲は変っていない。

2) 水路粗度の影響： 図-2.3.1(e)のⅢ-1 ( $n = 0.00986$ )とⅢ-2 ( $n = 0.0160$ )との比較からわかるように、 $Fr$  数の影響と同様に、 $\xi$  の絶対値は変化しているが、各領域の範囲に差がみられない。

3) 彎曲偏角の影響：  $Y_c/B = 3$ の図-2.3.1(b) ( $\theta = 90^\circ$ ) (d) ( $\theta = 180^\circ$ ) および(e) ( $\theta = 90^\circ$ ) の比較から検討すると、発生域について(b)、(d)の図では  $\theta = 0 \sim 60^\circ$  で一致しているが、(e)の図では、 $\theta = 0 \sim 45^\circ$  で多少異なる。(b)、(e)の図の違いは水路のスケールの差あるいは  $B/h$  の影響が考えられるが、本実験の範囲では明らかでない。

4)  $Y_c/B$  の影響： 図-2.3.1(a) ( $Y_c/B = 1$ )、(c) ( $Y_c/B = 1.5$ ) および(b)、(d)、(e) ( $Y_c/B = 3$ ) の比較から、 $Y_c/B$  の小さい場合には発生域の範囲が大きく、 $\xi$  の直線性が明確になると考えられる。特に、 $Y_c/B = 1$  の場合では、 $\theta = 75^\circ$  まで及んでいるのが注目される。

以上の他に、 $Re$  数、 $B/h$  断面形状などの影響が考えられ、各要素の影響を明確にするには、さらに広範な実験値による検討が必要であろう。

また、各領域の限界を一般的に決定するには前節で述べた各領域の特性を考慮した解析を行なうことが必要であつて、次章で発生域の限界について考察するつもりである。

## 第 4 節 結 言

以上、本章では、彎曲流の内部における平均流の運動特性および力学的機構を把握するために、彎曲流の遷移過程を二次流の発生域、発達域、完全発達域の三領域に区分し、各領域の特性を明らかにした。

こうした領域区分は、境界面で限定された噴流、湧源拡散などの現象で定義されている領域区分と同様な側面をもっており、初期状態としての発生域、極限状態としての完全発達域の特性を明らかにすることが、彎曲流の現象を把握する鍵になると考えられる。

この意図から、第 3 章および第 4 章で、それぞれ発生域、完全発達域における現象を理論的に考察し、実験値と比較するとともに発達域の現象に対する適用性についても検討しようと思う。

## 参 考 文 献

- 1) 村本嘉雄、井上喬之：開水路彎曲流の内部機構、京大防災研究所年報、第 8 号、( 1964 )
- 2) Squire, H. B. and Winter, K. G. : The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform Stream, J. Aeronaut. Sci, 18, ( 1951 )

### 第3章 二次流の発生域に関する考察<sup>13)</sup>

#### 第1節 概 説

二次流の発生域は、直線流から彎曲流への遷移過程における初期状態であるが、曲率半径あるいは偏角の小さい彎曲水路では、この領域の現象が主体となると考えられる。また、一般の彎曲水路においても、発生域の存在は当然予測されるから、この領域の限界および特性を明らかにすることは重要な問題と言えよう。

しかし、発生域を特徴づける二次流の発生、発達過程に関して、われわれの知識は非常に限られており、その力学的機構および二次流の分布特性を掌握するにいたっていない。つぎに、二次流の発生機構および分布特性に関して、開水路および一般の曲線水路において行なわれてきた研究の方向を概述し、その問題点を明らかにする。

彎曲水路における二次流は、J. Thompson<sup>1)</sup>によって、最初にらせん流としての性状が観察され、その発生機構に関して「圧力こう配に垂直な方向の流速分布の存在によって、遠心力に差が生じ、それが二次流の発生原因である」という今日広く知られている説明がなされた。その後、C.A. Mockmore<sup>2)</sup>は流線の式で各流速成分に二次元の分布を仮定してらせん流の数式表示を行ない、A. Shukry<sup>3)</sup>は第1章で述べたように二次流の本格的な測定を行なった。しかし、Mockmoreの考察は仮想的な二次流の記述にとどまっており、Shukryの研究もThompsonの概念を深めるにいたらなかった。

近年になつて行なわれた二次流の代表的な研究としては、Rozovskii<sup>4)</sup>の研究を挙げることができよう。彼は、J. Boussinesq<sup>5)</sup>の層流状態の二

次流に関する考察で分子粘性係数の代りに渦動粘性係数を用い、乱流状態の式を誘導し、実験結果と詳細な検討を行なった。しかし、彼の考察は主に完全発達域に限られており、発生域における二次流の分布特性については明らかにしていない。また、最近、Ben-chie-Yen<sup>6)</sup>は二次流の発達過程についての実験的研究を行ない、水深の増加にともなって、二次流の発生域が長くなることを指摘している。しかし、二次流の取り扱いは、Rozovskiiと同様に完全発達域に限られており、実験結果との対応が充分になされていない。

一方、開水路彎曲流以外の研究では、翼列あるいは曲管内の二次流に関して、H. B. Squire, K. G. Winter<sup>7)</sup>によって導入された非粘性せん断流としての取り扱いが一つの方向をなしている。この立場では、二次流の発生機構を「上流直線部のせん断流れが曲線部で粘性の影響を受けずに変形する過程」として把握し、主流をポテンシャル流、二次流を渦度と考え、渦度保存則にもとづく点を特色としている。こうした概念および解析法は、その後、W. R. Hawthorne<sup>8)</sup> および M. J. Lighthill<sup>9)</sup>によって拡張、一般化され二次流理論として確立されつつある。しかし、これまで展開された理論では、渦度の変形、移送に際して、粘性による拡散を考慮したものは少く、A. W. Marri<sup>10)</sup>, Hawthorne<sup>11)</sup>によって層流の場合について若干検討されているが、二次流の分布特性を把握するにいたっていない。

本章では、まず Squire, Winter の理論の開水路彎曲流での適用性を検討するために、第1節で渦度保存則から二次流の流速分布式を導き、実験値と比較検討を行なう。第2節では、開水路流れで主要な役割をなす底面の摩擦の影響を考慮し、渦度の拡散を加味した解析を試み、発生域の限界について実験結果と比較する。また発生域の限界点における二次流の流速分布式を導き、Rozovskii の式と併せて、発達域における適用性についても検討する。

## 第 2 節 発生域における二次流の流速分布

### (1) 渦度保存則にもとづく考察

定常流における渦度保存則は、流速ベクトルを  $U$ 、渦度ベクトルを  $\omega$  とするとつぎのように表わされる。

$$\text{rot}(U \times \omega) = \omega \nabla U - U \nabla \omega = 0$$

上式の主流方向成分に関する式は、前章の図 - 2・2・1 に示した円筒座標系を用いると

$$\left( \xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{U}{r} - \left( U \frac{\partial}{\partial \theta} + rV \frac{\partial}{\partial r} + rW \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\xi}{r} = 0 \quad (3 \cdot 2 \cdot 1)$$

で与えられる。

発生域の特性から、二次元ポテンシャル流れとしての主流成分  $U(r, \theta)$  を考え、(3・2・1)式の各流速成分、渦度成分が  $U(r, \theta)$  からの微小変化で表わされるところとしてつぎのようにおく。

$$U = U(r, \theta) + u_1, \quad V = v_1, \quad W = w_1 \\ \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1 \quad (3 \cdot 2 \cdot 2)$$

二次以上の微小項を無視し、添字を省略すると、

$$\xi \frac{\partial U}{\partial \theta} + r^2 \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U}{r} \right) - U \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0 \quad (3 \cdot 2 \cdot 3)$$

で表わされる。

上式より、二次流成分  $\xi$  を求めるには、 $U$  に彎曲部の境界条件に対応したポテンシャル流れの関数形を仮定する必要がある。しかし、上流直線部の一



様分布から彎曲部内の自由渦分布にいたる $\psi$ を一般式で表示することは難しいので、近似的に自由渦分布

$$\psi = D, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (3.2.4)$$

を仮定する。(3.2.3)式に上式の関係代入し、 $\eta$ を上流直線部の $\eta_s$ で近似すると、 $\xi$ の変化はつぎようになる。

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -2\eta_s \quad (3.2.5)$$

この式は、Squire, Winterが流線座標系を用いて誘導した結果と同じ関係を示しており、上流直線部で渦度が0でない場合に、 $\xi$ は $\theta$ に比例して増加することを示している。

つぎに、 $\eta_s = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_s$ ,  $\xi = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ と考え、層流、乱流の場合について $\psi$ の分布形を求めてみよう。なお、こうした近似は、第1章第3節(4)に示した $\psi$ ,  $w$ の測定結果(図-1.3.18, 図-1.3.19)から明らかのように、断面中央部で許容されよう。

#### (i) 層流

上流直線部の渦度は二次元定常流の流速分布式より

$$\eta_{sl} = U_*^2 (1 - z') / \nu \quad (3.2.6)$$

で表わされる。ここで、 $U_*$ は主流方向の摩擦速度、 $\nu$ は動粘性係数、 $z' = z/h$ である。

(3.2.6)式を、(3.2.5)式に代入し、 $\psi$ を求める際に、境界条件として

$$\theta = 0: \quad \psi = 0 \quad (3.2.7)$$

$$z' = 0: \quad \psi = 0 \quad (3.2.8)$$

$$\text{あるいは} \quad \int_0^1 \psi dz' = 0 \quad (3.2.9)$$

が考えられる。しかし、(3.2.5)式では底面のせん断応力の影響を無視しているので、(3.2.7)および(3.2.9)式の条件を用いることにする。

すなわち，彎曲部流入点の底面で $v=0$ であるが，彎曲部内では連続の関係によって底面ですべりが生じ， $v$ は有限の値をとると考える。

以上の条件を用いて $v$ を求めると

$$v_k = U_*^2 h \theta f_k(z') / 3\nu, \quad f_k(z') = 6z' - 3z'^2 - 2 \quad (3.2.10)$$

が得られる。

### (ii) 乱流

上流直線部における流速分布として対数則を考えると

$$\eta_{st} = U_* / \kappa h z' \quad (3.2.11)$$

で与えられる。ここで， $\kappa$ はKármán 定数である。境界条件は層流の場合と同様に (3.2.7) および (3.2.9) 式を考える。しかし，(3.2.11) 式を $z'=0$ まで適用できないので，粘性底層との接続を考え $z'=\delta'$ で

$$\eta_{st} = \eta_{sk} \quad \text{とすると，}$$

$$\delta' = \nu / \kappa h U_*$$

で与えられる。 $0 \leq z' \leq \delta'$  に対して (3.2.10) 式を用い， $\delta' \leq z' \leq 1$  に対して (3.2.5)，(3.2.11) 式より $v_t$ を求め

$$z'=\delta': \quad v_k = v_t, \quad \int_0^{\delta'} v_k dz' + \int_{\delta'}^1 v_t dz' = 0 \quad (3.2.12)$$

の条件から積分定数を決めるとつぎのようになる

$$0 \leq z' \leq \delta': \quad v_t = \frac{2U_*^2 h \theta}{\nu} z' + \frac{2U_* \theta}{\kappa} \left( \ln \delta' - \frac{\delta'}{2} \right) \quad (3.2.13)$$

$$\delta' \leq z' \leq 1: \quad v_t = \frac{2U_* \theta}{\kappa} \left( \ln z' + 1 - \frac{\delta'}{2} \right) \quad (3.2.14)$$

しかし，通常  $\delta' = \nu / \kappa h U_* \lesssim 10^{-2}$  と考えられるので， $v_t$  は壁面近くまで

$$v_t = \frac{2U_*\theta}{\kappa} f_t(z'), \quad f_t(z') = \ln z' + 1 \quad (3.2.14)'$$

によって近似できる。

いま, (3.2.10), (3.2.14)' 式で境界条件に関係しない関数形  $f_l(z')$ ,  $f_t(z')$  を図示すると, 図-3.2.1 のようになる。 $v$  分布の理論曲線で,  $v=0$  の位置は層流の場合  $z' = 0.423$ , 乱流の場合  $z' = 0.367$  となる。層流の実験値が得られていないので, 定量的には明らかでないが, 普通 Reynolds 数の増加とともに  $v=0$  の位置は壁面に近くなるといわれており, 定性的には一致している。

## (2) 実験値との比較

前章第3節の表-2.3.1に示された各実験条件における  $v$  の測定値と前項の誘導結果とを比較検討する。しかし, 各実験の Reynolds 数の範囲は  $Re = 1.75 \times 10^4 \sim 3.82 \times 10^4$  であって, すべて乱流状態と考えられるので, (3.2.14)' 式を対象とし,  $\kappa = 0.4$ ,  $U_* = \sqrt{g I_e h}$  ( $I_e$ : エネルギーこう配) を用いる。

図-3.2.2はII-1の実験ケースで,  $\theta = 30^\circ \sim 120^\circ$  断面の水路中心における  $v$  の測定値を理論曲線と比較したものである。図にみられるように, 発生域と考えられる。 $\theta = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  では, 測定値は理論曲線に近い値を示すが,

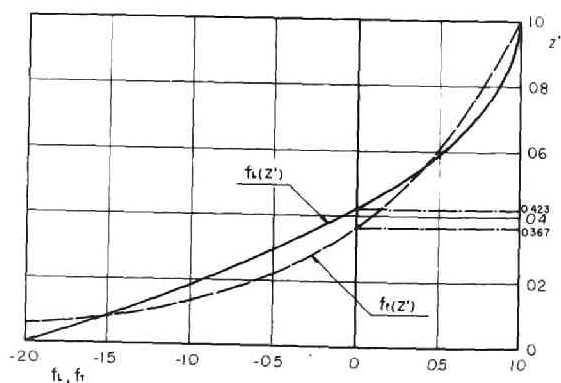


図-3.2.1

$f_l(z')$ ,  $f_t(z')$  の曲線

$\theta = 90^\circ, 120^\circ$   
 の発達域では理論値より小さい値を示している。また、底面近くでは、発生域においても、理論曲線より小さい値となり、 $\theta = 30^\circ$  より  $\theta = 60^\circ$  で底面のせん断応力の影響が上方に及んでいるのが注目されよう。

つぎに、各実験ケースについて、発生域と考えられる  $\theta = 30^\circ$  の断面の実験値と理論曲線を比較すると図-3.2.3のようになる。底面近く ( $z' \leq 0.2$ ) を除いて、ほぼ一致していることがわかる。

図-3.2.4は  $v$  分布の半径方向の変化に対する分布式の適合性をⅡ-3の実験ケースについて

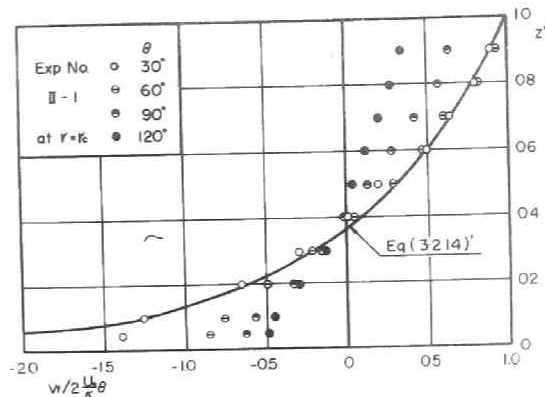


図-3.2.2

$v$  の理論曲線と実験値との比較 (Ⅱ-1)

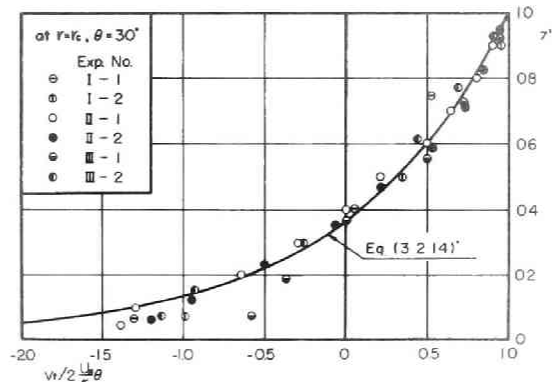


図-3.2.3

$v$  の理論曲線と実験値との比較 (Ⅰ-1 ~ Ⅲ-2)

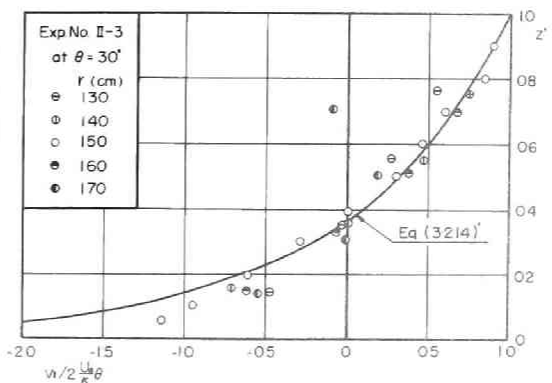


図-3.2.4

$v$  の理論曲線と実験値との比較 (Ⅱ-3;  $r$  方向各点)

検討したものである。 $r = 130\text{ cm}$ ,  $150\text{ cm}$  の内, 外岸近くの測定値は, 水面近くでも理論曲線からはなれており, 特に, 外岸近くでは全く異なった分布形をなしている。これは, 前述のように, 内岸, 外岸近くでは  $w$  成分の影響が入り,  $\xi = -\partial v / \partial Z$  の近似ができないことによると考えられる。また, 外岸近くでは, 水面付近で, 内岸へ向う流れが生じており, 流れの安定性も考慮する必要がある。

### 第 3 節 発生域の限界に関する二, 三の考察

#### (1) 底面摩擦の影響と発生域の限界

前節の考察および実験値との比較から明らかなように, 渦度保存則にもとづく場合, 二次流 ( $\xi$ ) は (3・2・5) 式に従って直線的に増加することになるが, 実際現象ではある限界がみられる。こうした発生域の限界は境界面の拘束条件に関係すると考えられる。ここでは, 底面の摩擦の影響について考察し, 発生域の限界を与える彎曲偏角および底面近くの  $v$  分布の近似式を求める。

いま, 前節の (3・2・1) 式に対して, 底面の摩擦による渦度の拡散を主体と考えると, 主流方向の渦度式はつぎのように表わされる。

$$\left( \xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\zeta \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{u}{r} - \left( u \frac{\partial}{\partial \theta} + rv \frac{\partial}{\partial r} + rw \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{\xi}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial Z^2} (\varepsilon \xi) \quad (3 \cdot 3 \cdot 11)$$

ここで,  $\varepsilon$  は渦度の拡散係数であって, 層流の場合  $\varepsilon = \nu$ , 乱流の場合は渦

動粘性係数を考えて  $\varepsilon = \kappa h U_* z'$  を仮定する。<sup>\*</sup>

(3・2・1) 式で、前節と同様に (3・2・2) 式および (3・2・4) 式の近似を行なうと、

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -2\eta_s + \frac{r^2}{D} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} (\varepsilon \xi) \quad (3 \cdot 3 \cdot 2)$$

が得られる。(3・3・2) 式を解く際に付加項として、(3・2・5) 式の解あるいは  $\partial \xi / \partial \theta = 0$  の解が考えられる。ここでは、渦度保存則からの変化を考える意味で前者を採り、(3・3・2) 式の解を

$$\xi = -2\eta_s \theta + \xi_1(\theta, z') / \varepsilon \quad (3 \cdot 3 \cdot 3)$$

の形で与える。(3・3・3) 式を (3・3・2) に代入し、 $\varepsilon$  として上述の仮定、 $\eta_s$  に対して、(3・2・6)、(3・2・11) 式の仮定を用いると、層流、乱流の場合について  $\xi_1$  に関する式はつぎのようになる。

$$\text{層流:} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\nu r^2}{D h^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \quad (3 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$\text{乱流:} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\kappa U_* r^2}{D h} z' \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \quad (3 \cdot 3 \cdot 5)$$

いま、(3・3・4) 式、(3・3・5) 式に対して、それぞれ

<sup>\*</sup>  $\varepsilon = \kappa h U_* z'$  は (3・2・11) 式の  $\eta_s$  の仮定と同様に主流の流速分布の対数則に準ずるものである。この他、 $\varepsilon$ 、 $\eta_s$  の仮定として (a)  $\varepsilon = \kappa h U_* z' (1 - z')$ 、 $\eta_s = U_* / \kappa h z'$  (b)  $\varepsilon = \kappa h U_* z' \sqrt{1 - z'}$ 、 $\eta_s = U_* \sqrt{1 - z'} / \kappa h z'$  とする場合<sup>12)</sup> についても検討を加えたが、本質的な差異がないので省略する。

$$S = \sqrt{\frac{Dh^2}{4\nu\theta}} \frac{z'}{r} \quad (3.3.6)$$

$$S = \sqrt{\frac{Dh}{\kappa U_* \theta}} \frac{z'^{\frac{1}{2}}}{r} \quad (3.3.7)$$

を用いて変数変換を行なうと、 $\xi_1(s)$  に関して同一の常微分方程式、

$$\frac{d^2 \xi_1}{ds^2} + 2S \frac{d\xi_1}{ds} = 0 \quad (3.3.8)$$

が得られ、その解は

$$\xi_1 = A_1 \operatorname{erf} s + A_2, \quad \operatorname{erf} s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s^2} ds \quad (3.3.9)$$

となる。ここで、 $A_1, A_2$  は積分定数である。

自由表面  $S=S_h$  で  $\xi_1=0$  および  $\operatorname{erf} S_h \sim 1$  を考えると、(3.3.9) 式は、新たな積分定数  $A$  を用いて

$$\xi_1 = A(1 - \operatorname{erf} s / \operatorname{erf} S_h) = A(1 - \operatorname{erf} s) \quad (3.3.10)$$

で表わされる。したがって、(3.3.3) 式は層流の場合について

$$\xi = -2 \frac{U_*^2}{\nu} \theta(1-z') + A_x(1 - \operatorname{erf} s) \quad (3.3.11)$$

乱流の場合

$$\xi = -2 \frac{U_*}{\kappa h} \theta \frac{1}{z'} + A_t(1 - \operatorname{erf} s) \quad (3.3.12)$$

と表わされる。また  $v$  に関する式は、水面における流速  $U_h$  を用いると、層流の場合

$$\begin{cases} v = \left\{ \frac{U_*^2}{\nu} \theta (2Z' - Z'^2 - 1) + v_h \right\} - A_t \sqrt{\frac{4\nu\theta}{D}} r f_1(s) \\ f_1(s) = s - \int_0^s \operatorname{erf} t \, dt \end{cases} \quad (3 \cdot 3 \cdot 13)$$

$$\begin{cases} v = \left( 2 \frac{U_*}{K} \theta \ln Z' + v_h \right) + 2 A_t h f_2(s) \\ f_2(s) = -\ln s + \int_0^s \frac{1}{t} \operatorname{erf} t \, dt \end{cases} \quad (3 \cdot 3 \cdot 14)$$

となる。

(3・3・11)および(3・3・12)式で右辺第1項は慣性力のみによって生ずる負の方向の渦度，第2項がそれを拡散，減衰させる正方向の渦度を表わしている。いま，前者を  $\xi_i$ ，後者を  $\xi_d$  で表わし， $\xi = \xi_i + \xi_d$  に対応する  $v$  を考えると，彎曲部流入点付近で底面近くの現象の概観は図-3・3・1のようになる。

すなわち，底面の影響が及ぶ限界点  $Z' = \delta'_t$  ( $s = S_t$ ) において  $v$  分布に変曲点が現われ， $-\xi_i = \xi_d$  の点  $Z' = \delta'_o$  において， $v$  は負の最大値をとる。さらに，乱流の場合は底面の極く近傍  $0 \leq Z' \leq \delta'_x$  ( $0 \leq s \leq S_x$ ) では粘性底層の領域にあって，底面で  $\xi = \text{一定}$ ， $v = 0$  になると考えられる。

しかし，(3・3・11)式および(3・3・12)式における右辺第1項 ( $v_i$ )，第2項 ( $v_d$ ) の関数形はそれぞれ図-3・3・1の破線，鎖線で示すようになり，単に  $v_d + v_i$  として実線で表わした  $v$  の特性をうることができない。

そこで， $v$  分布を  $0 \leq Z' \leq \delta'_o$  では  $v_d$ ， $\delta'_o \leq Z' \leq 1$  では  $v_i$  で近似できると仮定する。こうした仮定は水路の前駆長などの解析で用いられる「加速する外層をもつ境界層」の取り扱いに類似している。しかし，



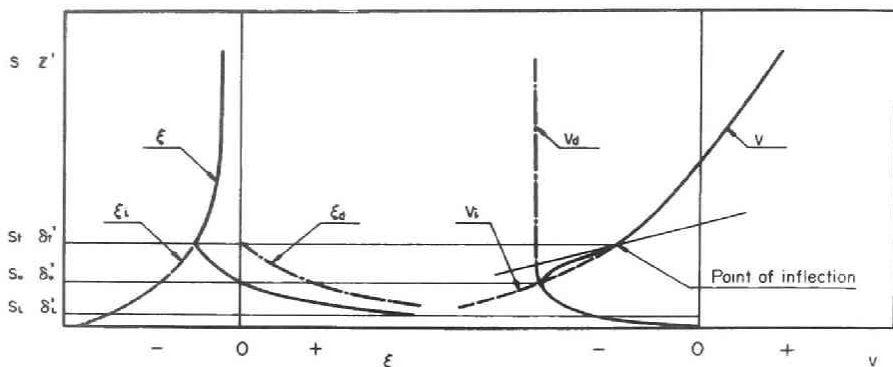


図 - 3.3.1 底面付近の  $\xi$ ,  $v$  分布の概観

二次流の発生域の場合では、外層が  $v_i = 0$  から出発する回転流であること、発達の特限の分布が明らかでない点に問題がある。

以上の仮定にもとづいて、底面の影響を考えると、 $\delta'_0$  は (3.3.13) 式の  $f_1(s)$  あるいは (3.3.14) 式の  $f_2(s)$  が一定値になる限界の  $s$  を定めることによって与えられる。 $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  の値を数値計算によって求め、図示すると図 - 3.3.2 のようになり、 $\delta'_0$  に対応する  $s$  として  $s = s_0 = 1.5$  をとれば充分と考えられる。

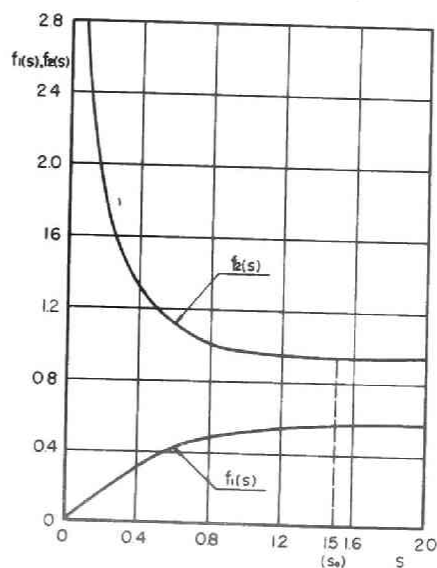


図 - 3.3.2

$f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  の曲線

したがって, (3.3.6)式, (3.3.7)式で,  $S = S_0 = 1.5$ ,

$Z' = \delta'_0 = 1$  と考えて, 底面の影響が水面に対する限界の  $\theta_\lambda$  を求めると, 層流, 乱流に対してそれぞれつぎのようになる。

$$\theta_\lambda = \frac{D h^2}{9 \nu r^2} \quad (3.3.15)$$

$$\theta_\lambda = \frac{D h}{2.25 K U_* r^2} \quad (3.3.16)$$

また, (3.3.13) (3.3.14) 式より  $v$  分布を定めるには, 2つの条件を用いて,  $A_\lambda (A_t)$  および  $v_h$  を決定する必要がある。いま, 境界条件として,

$$Z' = \delta'_0 : \quad v_d = v_\lambda, \quad \int_0^{\delta'_0} v_d dz' + \int_{\delta'_0}^1 v_\lambda dz' = 0 \quad (3.3.17)$$

を考え,  $\delta'_0 \leq 10^{-1}$  の範囲で  $v_h, A_\lambda (A_t)$  の近似値を求めるとつぎのようになる。

$$\text{層 流} \quad \begin{cases} v_h = \frac{1}{3} \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta (1 + 1.28 \delta'_0) \\ A_\lambda = \frac{U_*^2}{\nu} \theta (1.81 \frac{1}{\delta'_0} - 6.63) \end{cases} \quad (3.3.18)$$

ここで, 
$$\delta'_0 = 1.5 \sqrt{\frac{4 \nu \theta}{D}} \frac{r}{h}$$

$$\text{乱 流} \quad \begin{cases} v_h = \frac{2 U_*}{K} \theta (1 + 3.96 \delta'_0 + 2.96 \delta'_0 \ln \delta'_0) \\ A_t = 1.05 \frac{U_*}{K h} \theta (1 + 3.96 \delta'_0 + \delta'_0 \ln \delta'_0) \end{cases} \quad (3.3.19)$$

ここで 
$$\delta_0' = 2.25 \frac{\kappa U_* \theta r^2}{D h}$$

しかし,  $10^{-1} \leq \delta_0' \leq 1$  の範囲では単純な関数形で近似することは難しく, 発生域の限界状態を把握して, 逆に漸近解を求める工夫が必要と考えられる。

## (2) 発生域の限界における二次流の流速分布

発生域の限界では,  $\xi$  の主流方向の変化が極値をとると考えられるので, (3・3・2) 式で  $\partial \xi / \partial \theta = 0$  としてつぎの式を用いる。

$$\frac{\partial^2 (\xi \xi)}{\partial Z^2} = \frac{2 D \eta_s}{r^2} \quad (3 \cdot 3 \cdot 20)$$

### (i) 層流

(3・3・20)式で  $\eta_s$  に (3・2・6)式を用い,  $\xi = \nu$  とすると,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial Z^2} = \frac{2 D}{r^2} \left( \frac{U_* h}{\nu} \right)^2 (1 - Z') \quad (3 \cdot 3 \cdot 21)$$

となる。上式で,  $\xi = -\partial \nu / \partial Z$  と考え,  $\nu$  を求めると, つぎのようになる。

$$\nu = \frac{2 D h}{r^2} \left( \frac{U_* h}{\nu} \right)^2 \left( \frac{1}{24} Z'^4 - \frac{1}{6} Z'^3 - \frac{a}{2} Z'^2 - b Z' + c \right)$$

いま, 境界条件として, 底面, 水面における条件および連続の条件

$$Z' = 0 : \nu = 0, \quad Z' = 1 : \frac{\partial \nu}{\partial Z} = 0, \quad \int_0^1 \nu dZ' = 0 \quad (3 \cdot 3 \cdot 22)$$

を考え、積分定数を定めると

$$\begin{cases} v_l = \frac{Dh}{60r^2} \left( \frac{U_* h}{\nu} \right)^2 g_l(z') \\ g_l(z') = 5z'^4 - 20z'^3 + 24z'^2 - 8z' \end{cases} \quad (3.3.23)$$

がえられる。

(ii) 乱流

(3.3.20)式で  $\eta_s$  に (3.2.11)式を用い、 $\varepsilon = \kappa h U_* z'$  を仮定すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} (z' \xi) = 2 \frac{D}{\kappa^2 r^2} \frac{1}{z'} \quad (3.3.24)$$

となる。上式より、 $V$ の一般式は

$$V = 2 \frac{D}{\kappa^2 r^2} (z z' - z' \ln z') - a h z' - b h \ln z' + C$$

で表わされる。境界条件として、(3.3.22)式 の後の2つの条件を考え、前節の乱流の場合の取り扱いと同様に、粘性底層との接続を仮定し、

$\delta' < z' \leq 1$  の範囲で  $V$ の近似式を求めると

$$\begin{cases} v_t = \frac{Dh}{\kappa^2 r^2} g_t(z') \\ g_t(z') = z' - 2z' \ln z' + \ln z' \end{cases} \quad (3.3.25)$$

がえられる。ただし、この場合、 $\delta' = 7.5 \left( \frac{\nu}{U_* h} \right)^2 < 10^4$  である。

いま、(3.3.23)式、(3.3.25)式で、境界条件に関係しない関数形  $g_l(z')$ 、 $g_t(z')$ を図示すると、図-3.3.3のようになる。

$g_l(z')$  の  $v=0$ の位置は  $g_t(z')$  のそれより上にあって前節の図-3.2.1 の  $f_l(z')$ 、 $f_t(z')$ と同様の対応をなしている。また、 $g_l(z')$ と

$f_l(z')$  と比較すると、 $g_l(z')$  では負の最大値が底面より上にあらわれており、 $v=0$  の位置も  $f_l(z')$  より高く、底面の影響が効いていることがわかる。しかし、 $f_t(z')$  と  $g_t(z')$  の差異は明確でない。

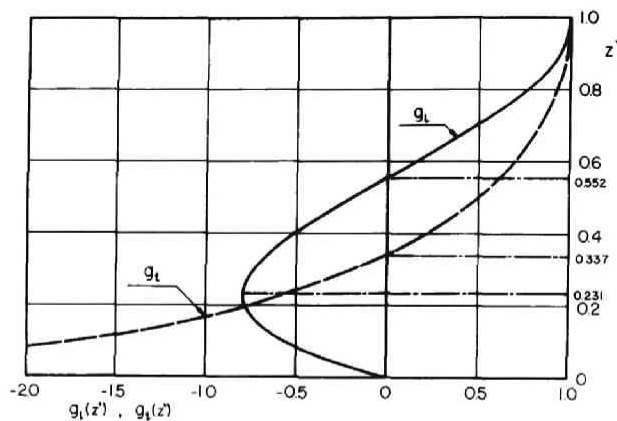


図 - 3.3.3

$g_l(z'), g_t(z')$   
の曲線

### (3) 実験値との比較

前章第3節の表 - 2.3.1 の各実験ケースでは、底面近くの  $v$  の測定値が得られていないので、第1項の誘導結果については、(3.3.16)式で表わされる発生域の限界を検討する。また、第(2)項の結果では、(3.3.25)式の分布形について、Rozovskii の式と併せて実験値と比較する。

#### (i) 発生域の限界

発生域の限界の偏角  $\theta_i$  を (3.3.16) 式から求めるには、定数  $D$  および  $\kappa$  を定める必要がある。定数  $D$  は、仮想流として自由渦分布を考えていることから、簡単に

$$D = \frac{Q}{h \ln r_2/r_1} \quad (3.3.26)$$

と仮定する。ここで、 $Q$  は流量、 $r_1, r_2$  はそれぞれ内、外岸の曲率半径で

ある。また、 $\kappa$ は発生域で主流の流速が直線流の速度こう配を保持することから、 $\kappa=0.4$ を用いる。

(3・3・16)式で、以上の定数を考え、水路中心  $r = r_c$  における  $\theta_i$  を求めると

$$\theta_i = \frac{1.1Q}{U_* r_c^2 \ln r_i/r_1} \quad (3・3・27)$$

となる。表-2・3・1に示したⅠ-1～Ⅲ-2の各実験条件について  $\theta_i$  を計算し、前章の渦度分布の実験値より定めた領域区分と比較すると、表-3・3・1のようになる。また同表には、主流の流速分布の最大流速の位置  $r_M$  と  $r_c$  との関係も比較されており、 $r_M < r_c$  ,  $r_M > r_c$  はそれぞれ

| 実験<br>番号 | 実験 値 $\theta$ (度) |             |   |   | 計算値<br>$\theta_i$<br>(度) |
|----------|-------------------|-------------|---|---|--------------------------|
|          | $r_M < r_c$       | $r_M > r_c$ | 発生域<br>$ \frac{\partial \xi}{\partial \theta}  > 0$ | 発達域<br>$ \frac{\partial \xi}{\partial \theta}  < 0$ |                          |
| Ⅰ-1      | 0 ~ 90            |             | 0 ~ 75  | 90  | 9.3                      |
| Ⅰ-2      | 0 ~ 60            | 90          | 0 ~ 60  | 90  | 76.4                     |
| Ⅱ-1      | 0 ~ 150           | 180         | 0 ~ 60  | 90 ~ 180  | 52.1                     |
| Ⅱ-2      | 0 ~ 150           | 180         | 0 ~ 60  | 90 ~ 180  | 63.8                     |
| Ⅱ-3      | 0 ~ 60            | 90 ~ 180    | 0 ~ 60  | 90 ~ 180  | 26.0                     |
| Ⅱ-4      | 0 ~ 30            | 60 ~ 180    | 0 ~ 60  | 90 ~ 180  | 35.6                     |
| Ⅲ-1      | 0 ~ 45            | 60 ~ 90     | 0 ~ 45  | 60 ~ 90   | 27.3                     |
| Ⅲ-2      | 0 ~ 45            | 60 ~ 90     | 0 ~ 45  | 60 ~ 90   | 23.8                     |

表-3・3・1

領域区分の実験値と発生域の限界  $\theta_i$  との比較

れ最大流速が内岸よりあるいは外岸よりに偏位していることを意味している。

表にみられるように、計算値はⅠ-2～Ⅱ-2のケースではほぼ対応するが、曲率半径の大きい場合（Ⅱ-3～Ⅲ-2）に対しては小さく評価されている。これは、（3・3・16）式の定数D、 $\kappa$ に対する仮定および第(1)項の考察で $\delta'_0$ を求める際の $S'_0$ の決め方などにある程度関係する。しかし、二次流の発達過程に対しては側壁による拘束条件も関係するので、さらに現象の解析を深める必要があろう。

## (ii) 二次流の流速分布

乱流の場合の分布式、（3・3・25）式の定数Dについて、（3・3・26）式を仮定し、 $r=r_c$ における $v$ を考えると、

$$v_t = \frac{Q}{\kappa^2 r_c^2 \ln r_2/r_1} (z' - 2z' \ln z' + \ln z') \quad (3 \cdot 3 \cdot 28)$$

となる。また、 $\kappa$ の値は、発達域の実験値とも比較するために、 $\eta$ の減少を考え、 $\kappa=0.4, 0.5, 0.6$ の値を用いる。

（3・3・28）式と $v$ の測定値とを比較した結果が図-3・3・3(a)～(c)に示されている。これらの図で、破線はつぎのRozovskii式を表わしている。

$$v = \frac{u_m h}{\kappa^2 r^2} \left[ F_1(z') - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_2(z') \right] \quad (3 \cdot 3 \cdot 29)$$

ただし、

$$F_1(z') = \int \frac{z \ln z'}{z' - 1} dz', \quad F_2(z') = \int \frac{\ln^2 z'}{z' - 1} dz'$$

C: Chézy係数、 $\kappa=0.5$ 、および $u_m$ は $r$ 点における主流の鉛直方向の平均流速である。

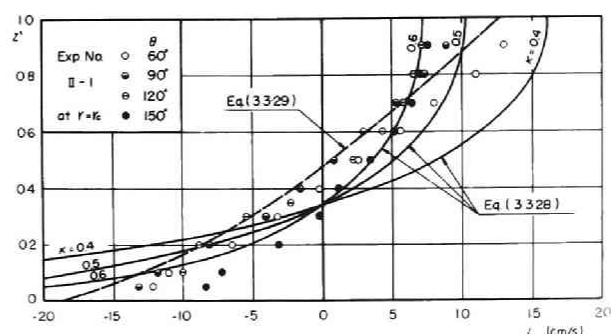
図-3・3・4(a), (b)からわかるように、Rozovskiiの式は完全発達域を

対象としているが、  
発生域の限界付近  
( $\theta = 60^\circ$ ) の  $v$   
分布形と全体的な傾  
向が類似している。  
しかし、 $v=0$  の位  
置が実験値より高く、

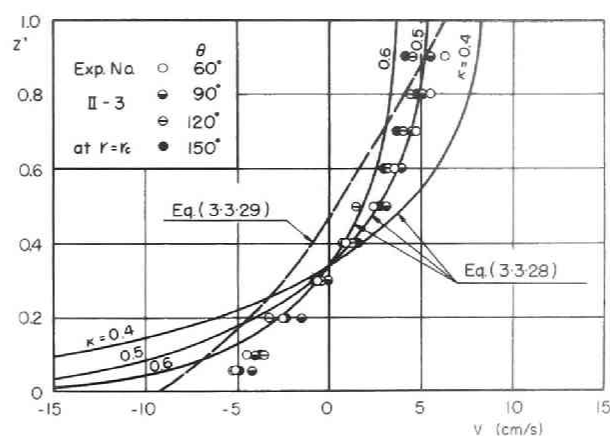
絶対値には差が現わ  
れている。また、 $v$   
分布が変形する  $\theta =$   
 $90^\circ \sim 150^\circ$  の  
断面では水面付近  
の違いが大きくなる。

一方、(3.3.28) 式の各曲線は  
 $\kappa = 0.5 \sim 0.6$  を用  
いると、 $v$  の変形が  
著るしい図 - 3.3.

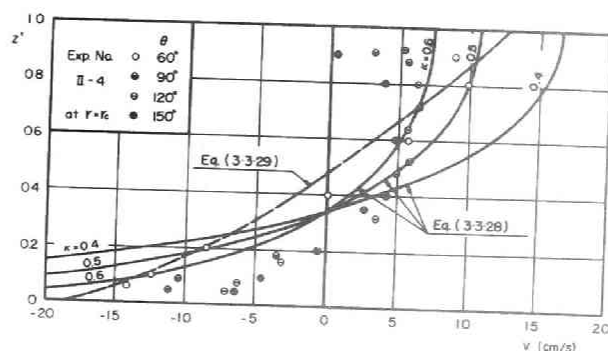
4(c) の場合を除いて  
発達域の分布をも近  
似的に表わすことが  
できる。また、Ro-  
zovskii の式に比  
して、 $v=0$  の位置  
から水面までの範囲  
では、実験値との対  
応は良いが、底面付



(a) (II - 1)



(b) (II - 3)



(c) (II - 4)

図 - 3.3.4(a) ~ (c)

$v$  の理論曲線と実験値との比較



近では差違が大きく、底層の条件を検討する必要がある。

以上、発生域の限界における分布式および Rozovski i の式と実験値との比較を行なったが、これらの式はいずれも一次元的な取り扱いなので、適用範囲は断面中央部で発達域の初期に限られると言えよう。

## 第 4 節 結 言

本章では、二次流の発生域を特徴づける二次流の発生、発達過程を明らかにするために、渦度保存則にもとづく Squire, Winter の理論より出発して、二次流の流速分布式を誘導するとともに、底面摩擦の影響を考慮した解析を試み、発生域の限界について考察を行なった。

理論式と実験値との比較は乱流状態の場合に限られているが、その結果を要約するとつぎのようである。

1) 渦度保存則から導かれた二次流の流速分布式, (3・2・14)' 式は  $\kappa = 0.4$   $U_* = \sqrt{g I_e h}$  を用いることによって、水路の中心付近で底面近くを除いた範囲 ( $z' \geq 0.2$ ) の実験値にほぼ一致する。これは、前章の表 - 2・3・1 に示した実験条件について共通している。

2) 発生域の限界における二次流の流速分布式, (3・3・25) 式は  $\kappa = 0.5 \sim 0.6$ ,  $D = Q/h \ln r_2/r_1$  を用いることによって、発達域の分布も近似的に表わすことができる。しかし適用範囲は水路の中心付近で発達域の初期に限られる。

3) 発生域の限界の推定は表 - 3・3・1 に示すように曲率半径の小さい場合はほぼ適合するが、大きい場合では小さく評価し、底面の影響とともに側面の拘束条件を考慮する必要がある。

## 参 考 文 献

- 1) Thompson, J. On the Origin and Winding of Rivers in Alluvial Plains with Remarks on Flow Around Bends in Pipes, Proc. Roy.Soci., Vol. 25. (1876) .
- 2) Shukry, A. Flow around Bends in an Open Flume, Trans, A S C E, Vol. 115, (1950) .
- 3) Mockmore, C. A . Flow around Bends in Stable Channels, Trans, A S C E, Vol. 109, (1944) .
- 4) Rozovskii, I . L. : Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of science of the Ukrainian, S S R, (1957) .
- 5) Boussinesq, J . Mémoire l'influence des frottement dans les mouvements réguliers des fluides. Journal de mathematiques pures et appliquées, deuxime série, tome xlll, (1868) .
- 6) Ben-Chie-Yen: Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel, Report of Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa , (1965) .
- 7) Squire, H. B. and Winter, K. G. : The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform Stream, J. Aeronaut. Sci., 18, (1951) .
- 8) Hawthorne, W. R. : Secondary Circulation in Fluid Flow,

Proc. Roy. Soci., A 206, (1951) .

- 9) Liglithill, M. J. : Drift, J. Fluid Mech., 1, (1956) ..
- 10) Marris, A. W. : The Generation of Secondary Vorticity  
in a Incompressible Fluid, Trans. A S M E , Ser. D, Dec,  
(1963) .
- 11) Hawthorne W. R. : Engineering Aspects-Research Frontiers  
in Fluid Dynamics, ( Ed. by Seeger & Temple ),  
John Wiley & Sons. New York, P. P. 1-29, (1965) .
- 12) Iwasa, Y. & Muramoto, Y. : On the Velocity Defect Law  
of Open Channel Flow, Memoirs of the Faculty of Engg.  
Kyoto Univ. (1963) .
- 13) 村本嘉雄 : 開水路彎曲流の内部機構 (Ⅱ) , 京都大学防災研究所年報,  
第9号, (1966)

## 第4章 二次流の完全発達域に関する考察<sup>① ⑤</sup>

### 第1節 概 説

二次流が完全に発達した領域の現象は、最も単純化された彎曲流の理想状態であつて、第2章第3節で示した実験値からもわかるように、実際現象で厳密に完全発達域を定義することは難しいと考えられる。

しかし、この領域は、開水路流れにおける等流状態あるいは拡散現象における終局状態（Fick 則成立範囲）と同様に、彎曲流が流体の粘性を受けて達する極限状態に相当し、彎曲流の現象解析に一つの基準を与える意味で重要と云えよう。また、断面形状が円形あるいは長方形などのように単純な場合には、比較的現象の解析も容易なので、かなり以前から開水路、管路を通じて多くの理論的考察が行なわれている。

従来よりなされている理論的考察の方向は、いずれも Navier-Stokes 式の近似解法であるが、層流理論による方法と三次元境界層理論による方法に大別されよう。つぎに管路内の流れの場合も含めてこの取り扱いを検討してみよう。

層流理論による解析は、1927 年 W, R, Dean<sup>2)</sup> が円形断面の曲管内の流れを対象として、層流状態にある二次流の流線、抵抗係数の増加を取り扱つて以来、伊藤<sup>3)</sup> 鬼頭<sup>4)</sup> などによつて、長方形断面、だ円断面の曲管における流れに適用されている。また開水路彎曲流に関しては、古く J, Boussinesq<sup>5)</sup> が二次元流としての考察を行なつており、近年になつて、前章に述べた I, L, Rozovskii および Ben-Chie-Yen の解析がある。

しかし、Dean、伊藤、鬼頭による解析では、Navier-Stokes 式を解

く前提として、つぎのような仮定が与えられている。

- 1) 彎曲部の中心曲率半径が水路断面の代表長（管径あるいは水路巾）に比べて十分大きい。
- 2) Basic Flowは直線流とする。すなわち、彎曲流の抵抗係数、流速分布の第1次近似として直線流のそれを考える。
- 3) 流れのReynolds数は十分小さい。あるいはDean数が小さい。ここでDean数とは  $Re \left( \frac{a}{R} \right)^2$  であつて、 $Re$  : Reynolds数、 $a$  : 管径、 $R$  : 曲管中心線の曲率半径である。

実際の流れにおいて、以上の条件を満足するものは極めて限られており、理論的手法としては興味深いが、ほとんど実証は得られていないようである。

一方、三次元境界層理論による方法は、静水中の回転円板上の流れなどで古くから注目されていたが、彎曲水路に対する適用は、M. Adler<sup>6)</sup>が最初で、曲管内の層流について解析を行なつた。その後、曲管流に対してはJ. Weske<sup>7)</sup>、伊藤<sup>8)</sup>、S. Baura<sup>9)</sup>、森、中山<sup>10), 11)</sup>によつて層流、乱流ともに取り扱われている。

また、開水路彎曲流に対しては、EinsteinおよびHarder<sup>12)</sup>が境界層概念を用いた近似的な取り扱いを行ない、岩垣、<sup>13)</sup>岸、小川<sup>14)</sup>によつて境界層の運動量式を用いた解析がなされた。

三次元境界層理論による取り扱いでは、上述の層流理論における仮定が含まれてなく、主流、二次流を同等に論ずる点、層流、乱流を通じて適用可能な点で有利と考えられる。

しかし、理論の適用に際して

- 1) 上層部（境界層外層）の流れの仮定
- 2) 下層部（境界層）の流速分布、せん断応力に対する仮定
- 3) 上、下層部の境界面の位置と境界条件
- 4) 上、下層部の流れの連続条件

の4点についてどのような仮定、条件を用いるかによつて、理論の妥当性が左右される。

従来の解析では、上、下層部の流れの式をそれぞれ独立に与えている場合が多く、特に1)、3)の点について十分に検討されてなく、つぎのような問題点があるように思われる。

まず、1)の仮定に関して、岩垣は主流に対して自由渦の流速分布(1・2・2)式、二次流に対して $V=0$ を用い、岸、小川はEinsteinおよびHarderの考察に基づいて、

$$U \propto r^n \quad (n: \text{定数}), \quad V \propto r^{n-1}$$

を仮定し、最終的には $n=1$ の場合を取り扱っている。また、曲管流れの場合は、Adlerの解析以来、ほとんど

$$U = ar + b \quad (a, b: \text{定数}), \quad V, W = \text{一定}$$

の仮定が用いられている。これらの取り扱いは、いずれも上層部の流れを単純化し、下層部の解析に重点をおいているものと考えられる。

しかし、境界層理論では、上層部の圧力こう配が下層部の流れを支配するので、上層部の流れと境界条件との一般的な関係を明らかにし、仮定の妥当性を予め検討しておく必要があると思う。

つぎに、3)の条件に関しては、Adlerの先駆的な解析以来、極く最近まで境界面としては、二次流の方向が逆転する限界の面、すなわち二次流が0となる面がとられている。また、境界面における二次流の流速に対する条件としては、上層に対して有限な一定値、下層に対して0が用いられている。この条件は $V=0$ とする岩垣の取り扱い以外、二次流に不連続な分布を仮定することになり、実際現象に矛盾すると考えられる。

最近発表された森、中山の解析でもこの点が指摘され、本論文の解析と同様に二次流が上、下層で滑らかに接続する境界条件が与えられている。

本章では、以上の解析上の問題点に留意し、第2節でNavier—Stokesの式および連続式より上、下層の流れの基礎式を導き、第3節で、上層部の流れについて考察し、二次流の効果、主流の特性、水面形について論ずるとともに実験値を比較検討する。第4節では、下層部の流れを解析する2つの方法を示し、第5節で、本章の内容を要約し問題点を明らかにするつもりである。

## 第2節 上層および下層の流れの基礎式

二次流の完全発達域における上、下層の基礎式は層流、乱流の場合について同様の手法で誘導される。したがって、ここでは、取り扱いの明確な層流の場合を対象とし、Navier—Stokesの式およびEulerの連続式を用いることにする。

いま、前章と同様に円筒座標系を用い主流方向に $\theta$ 、半径方向 $r$ 、路床より鉛直上方に $z$ をとり、各座標に対する流速成分を $u$ 、 $v$ 、 $w$ とする。また、完全発達域における流れの条件、

- 1) 定常かつ主流方向に一様。
- 2) 鉛直方向の加速度成分が十分小さい。

を考えると、流れの運動方程式および連続式はつぎのように表わされる。

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho_1 g + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) \quad (4.2.1)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho_2 g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4.2.2)$$

$$0 = \rho_3 g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.2.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2.4)$$

ここで、 $l_1, l_2, l_3$  はそれぞれ  $\theta, r, z$  軸に対応する重力の方向余弦を表わし、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。

境界層の概念にもとづいて、流れを上層、下層の2層に分け、各層に対応する主流（接線）方向、半径方向の速度成分を  $U(r), V(r)$  および  $u(r, z), v(r, z)$  とする。上層、下層の境界面、 $z = \delta(r)$  における各流速成分の境界条件は、上層部の流速および連続式を考慮して、

$$u_\delta = U(r), \quad v_\delta = V(r), \quad w_\delta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int_0^\delta v \, dz \right) + V \frac{\partial \delta}{\partial r} \quad (4.2.5)$$

で与えられる。また、鉛直方向の圧力分布は、(4.2.3) 式および水面  $z = h$  で  $p = 0$  の条件より、

$$p = \rho g l_3 (h - z) \quad (4.2.6)$$

となる。

(4.2.5), (4.2.6) 式を考慮して、(4.2.1), (4.2.2) 式より、上層 ( $\delta \sim h$ )、下層 ( $0 \sim \delta$ ) の流れの運動量式を求めるとつぎのようになる。



上層

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \{ r^2 U V (h - \delta) \} + \frac{U}{r} \frac{d}{dr} \left( r \int_0^\delta v dz \right) \\ = (h - \delta) \left\{ g \ell_1 + \nu \left( \nabla_r^2 U - \frac{U}{r^2} \right) \right\} \quad (4.2.7) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{ r V^2 (h - \delta) \} - \frac{U^2}{r} (h - \delta) + \frac{V}{r} \frac{d}{dr} \left( r \int_0^\delta v dz \right) \end{aligned} \right.$$

$$= (h - \delta) \left\{ g \ell_2 + g \ell_3 \frac{dh}{dr} + \nu \left( \nabla_r^2 V - \frac{V}{r^2} \right) \right\} \quad (4.2.8)$$

下層

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \int_0^\delta u v dz \right) - \frac{U}{r} \frac{d}{dr} \left( r \int_0^\delta v dz \right) \\ = g \ell_1 \delta + \nu \int_0^\delta \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) dz \quad (4.2.9) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \int_0^\delta v^2 dz \right) - \frac{1}{r} \int_0^\delta u^2 dz - \frac{V}{r} \frac{d}{dr} \left( r \int_0^\delta v dz \right) \end{aligned} \right.$$

$$= g \delta \left( \ell_2 + \ell_3 \frac{dh}{dr} \right) + \nu \int_0^\delta \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) dz \quad (4.2.10)$$

ただし (4.2.7), (4.2.8) 式の  $\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr}$  である。

(4.2.7) ~ (4.2.10) 式において、各式の左辺を比較すると、(4.2.7) 式の第2項と(4.2.9)式の第2項、(4.2.8) 式の第3項と(4.2.10)式の第3項がそれぞれ対応しており、上層、下層間における運動量の受授関係を示している。

一方、(4.2.4) 式を底面から水面まで積分して二次流に関する全

流水断面内の連続の関係を求めると、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v dz = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \{ (h-\delta) v + \int_0^\delta v dz \} = 0 \quad (4.2.11)$$

が得られる。この式を用いて (4.2.7), (4.2.8) 式を変形すると、上層の流れに関するつぎの運動方程式が得られる。

$$\begin{cases} v \frac{dU}{dr} + \frac{Uv}{r} = \ell_1 g + \nu (\nabla_r^2 U - \frac{U}{r^2}) \\ v \frac{dV}{dr} - \frac{U^2}{r} = \ell_2 g + \ell_3 g \frac{dh}{dr} + \nu (\nabla_r^2 V - \frac{V}{r^2}) \end{cases} \quad (4.2.12)$$

$$(4.2.13)$$

結局、上層、下層、の流れの基礎式は、(4.2.9) ~ (4.2.13) の5式で表わされる。しかし、これらの微分方程式系は非線型であつて、一般に解をうることができない。そこで、(4.2.11) 式の代りに上、

下層の連続関係

$$\int_0^h v dz = 0 \quad (4.2.14)$$

および上層の連続式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0 \quad (4.2.15)$$

を用いる。(4.2.14) 式は (4.2.11) 式の充分条件であつて、Einstein, Harder および岸、小川の解析で用いられている。また、(4.2.15) 式は二次流が完全に発達した領域で上層に対する下層の影響が十分小さい時に成り立つ関係と考えられる。

以上より、上層の流れは、(4.2.12), (4.2.13), (4.2.15) 式より決定され、その結果と (4.2.9), (4.2.10), (4.2.14) 式を用いて下層の流れが解析されることになる。

### 第3節 上層部に関する考察

#### (1) 上層部の流れの解析

一般に、実河川のように広巾の開水路では、側壁のせん断応力の影響は側壁近傍を除いて無視できるので、上層の流れの運動方程式(4・2・12)(4・2・13)式は近似的に

$$v \frac{dU}{dr} + \frac{Uv}{r} = \ell_1 g \quad (4.3.1)$$

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{U^2}{r} = \ell_2 g + \ell_3 g \frac{dh}{dr} \quad (4.3.2)$$

で与えられる。これらの式は重力の方向余弦の差違によつていろいろの場合に分れるが、ここでは、つぎの二つの場合について解析する。

$$(I) \quad \ell_1 = i, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = -1$$

$$(II) \quad \ell_1 = i_c r_c / r, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = -1$$

ただし、 $i$  は平均路床こう配、 $i_c$  は水路中心の路床こう配、 $r_c$  は水路中心の曲率半径である。(I) は平均路床こう配を用いた近似的な取り扱いであり、(II) は水路中心にそつて一定こう配をもち、半径方向に水平な路床の場合に対応する。なお、厳密には (i), (ii) の場合で、 $\ell_3$  はそれぞれ  $\ell_3 = -\sqrt{1-i^2}$ ,  $\ell_3 = -\sqrt{1-(i_c r_c / r)^2}$  であるが、 $i, i_c < 10^{-1}$  の場合には  $\ell_3 = -1$  で充分近似できる。

$$(I) \quad \ell_1 = i, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = -1 \text{ の場合}$$

(4・2・15), (4・3・1) および (4・3・2) 式より半径方向接線方向の流速成分および水面形の一般式を求めると、

$$V = C_1 / r \quad (4.3.3)$$

$$U = g i r^2 / 3 C_1 + C_2 / r \quad (4.3.4)$$

$$h = g i^2 r^4 / 36 C_1^2 - (C_1^2 + C_2^2) / 2 g r^2 + 2 i C_2 r / 3 C_1 + C_3 \quad (4.3.5)$$

が得られる。ここで、 $C_1, C_2, C_3$ は積分定数である。これらの積分定数を決めるには側壁における流れの境界条件を与えねばならない。しかし、側壁近くの流れの状態は明らかでないので、一つの仮定を導入し、積分定数  $C_1, C_2$  の関係を求めることにする。

従来より、完全流体としての彎曲流の解析では、定数を決めるのにつぎの仮定が用いられている。

(i) 主流流速の断面積分値が流量と等しい。

(ii) 比エネルギーの断面平均値が平均水深、平均流速で表わした比エネルギーに等しい。しかし、(i) は上層部だけで仮定するのは疑問であり、(ii) は第1章、第2節(2)で述べたように半径方向に流速分布がある場合には矛盾すると考えられる。また、定数の関係も複雑になり一般的な考察ができないので、ここでは、水深に関してつぎの仮定を考えることにする。

(iii) 一断面内で、平均水深が水路中心の水深に等しい。

(iv) 内、外岸の水位差が外壁と水路中心の水位差の2倍に等しい。

いま、(iii), (iv) の仮定を90°彎曲水路  $r_c = 25\text{cm} \sim 100\text{cm}$  の実験値より検討してみるとそれぞれ図-4.3.1および図-4.3.2に示すようになる。これらの図より、(iii) の仮定はすべての実験値について妥当であり、(iv) の仮定は曲率半径が大きい場合に認められると言えよう。

(iii) の仮定を用いて(4.3.5)式より  $C_1$  と  $C_2$  の関係を求めると、

$$C_1^2 (C_1^2 + C_2^2) = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 r_c^2 (r_c^2 + \frac{1}{40}) (r_c^2 - \frac{1}{4}) \quad (4.3.6)$$

が得られる。ここで、 $B$ は水路巾、 $r_c' = r_c / B (> 1/2)$  である。上層部の流れにおいては、通常、 $U \gg V$  すなわち  $C_2 \gg C_1$  と考えられるので、上式の左辺で  $C_1^4$  の項を  $C_1^2 C_2^2$  に対して無視し、 $U > 0, V > 0$

の条件を用いると、

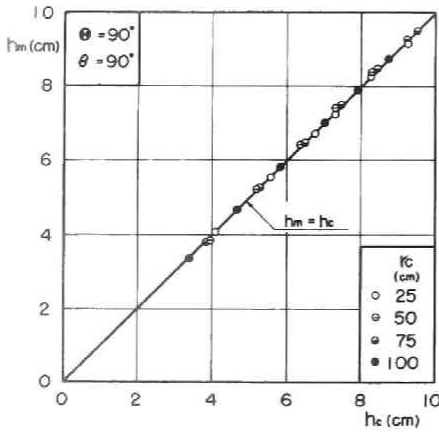


図-4.3.1 (iii)の仮定の検討

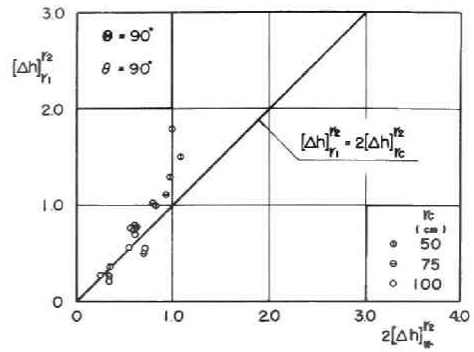


図-4.3.2 (iv)の仮定の検討

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{1}{3} g i B^3 r_c' \sqrt{\left(r_c'^2 + \frac{1}{40}\right) \left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)} \quad (4.3.7)$$

で表わされる。

一方、(iv)の仮定を用いた場合は

$$C_1^2 (C_1^2 + C_2^2) = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 r_c'^2 \frac{\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right) \left(r_c'^2 + \frac{1}{24}\right)}{\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)} \quad (4.3.8)$$

が得られ、近似式はつぎのようになる。

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{1}{3} g i B^3 r_c' \sqrt{\frac{\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(r_c'^2 + \frac{1}{24}\right)}{\left(r_c'^2 - \frac{1}{12}\right)}} \quad (4.3.9)$$

以上、(4.3.6)~(4.3.9)式で表わされた  $C_1$  と  $C_2$  との関係は路床と  
う配、水路巾、中心曲率半径を与えることによつて定まる。いま一例とし

$$g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}, \quad i = 2 \times 10^{-2}, \quad B = 25 \text{ cm とし、} \quad r_c' = 1 \sim 10$$

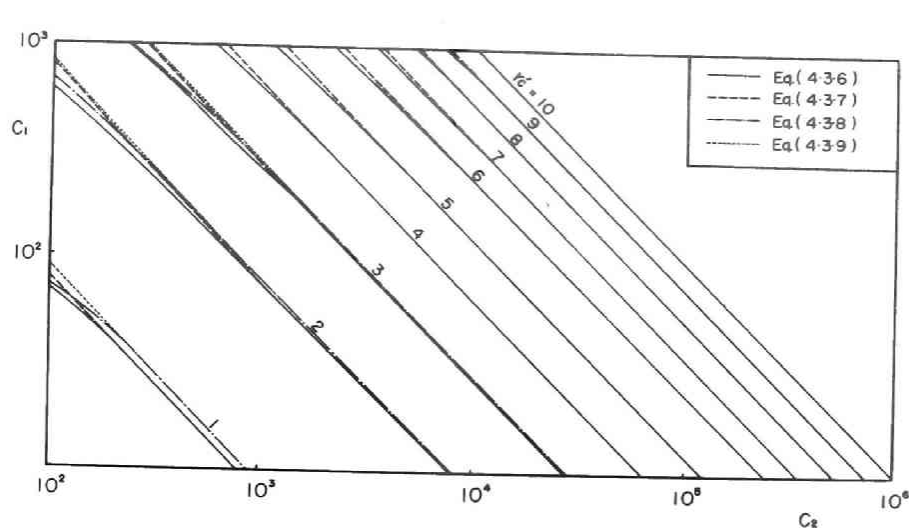


図 - 4.3.3  $C_1$  と  $C_2$  の関係を示す4式の比較

の場合について、上の4式を計算し、両対数図表で比較すると、

図-4.3.3のようになる。(4.3.6)式と

(4.3.8)式との差は  $C_1$ ,  $C_2$  の Order に比して十分小さく無視することができ、とくに  $r'_c \geq 5$  では両者はほとんど一致する。また、 $C_1$ ,  $C_2$  の近似式(4.3.7)、(4.3.9)式も  $C_1 < C_2$  で1 order 異なる範囲では適用できるといえる。

以上の検討より、 $C_1$ ,  $C_2$  の関係として(4.3.6)あるいは(4.3.7)式を用いて主流の流速分布、水面形の式を表わすことにする。

水路中心の流速  $U_c$  を用いて(4.3.4)式を無次元化し、(4.3.7)式を代入すると、流速分布は次のように表わされる。

$$\frac{U}{U_c} = \frac{r'^3 + r'_c \sqrt{(r_c'^2 + 1/40) \cdot (r_c'^2 - 1/4)}}{r_c'^3 + r'_c \sqrt{(r_c'^2 + 1/40) \cdot (r_c'^2 - 1/4)}} \cdot \frac{r'_c}{r'}$$

(4.3.10)

ここで、 $r' = r/B$  であつて、その変数範囲は  $|r' - r'_c| \leq 1/2$  である。しかし、 $r'_c$  が大きい場合には、(4・3・7) 式は、

$$C_1 C_2 = \frac{g i r_c^3}{3} \left\{ 1 - \frac{9}{80 r_c^2} - \frac{1}{640 r_c^4} - O\left(\frac{1}{r_c^5}\right) \right\}$$

と展開されるので、 $r'_c$  の範囲によつて

$$2 \leq r'_c < 5 : C_1 C_2 \doteq \frac{g i r_c^3}{3} \left( 1 - \frac{9}{80 r_c^2} \right)$$

$$r'_c \geq 5 : C_1 C_2 \doteq g i r_c^3 / 3$$

と近似することができる。これらの関係を用いると(4・3・10) 式は近似的に次のように表わされる。

$$2 \leq r'_c < 5 : \frac{U}{U_c} \doteq \frac{r'^3 + r'_c (r_c'^2 - 9/80)}{(2 r_c'^2 - 9/80) r'} \quad (4 \cdot 3 \cdot 11)$$

$$r'_c \geq 5 : \frac{U}{U_c} = \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r_c'^2} + \frac{r_c'}{r'} \right) \quad (4 \cdot 3 \cdot 12)$$

さらに、 $r'_c \geq 15$  に対しては

$$U/U_c = (1 + r'/r'_c) / 2 \quad (4 \cdot 3 \cdot 13)$$

の直線近似ができる。この式は、第1節で述べたように、曲管で仮定されている分布形に対応し、強制渦分布に定数が付加された形になっている。

一方、水面形の式は、(4・3・5) および(4・3・7) 式より

$$\begin{aligned} \frac{h-h_c}{B} = & \frac{g i^2 B^3}{36 C_1^2} \left\{ r'^4 - 2 r_c'^2 \left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r'^2} \right. \\ & + 8 r_c' \sqrt{\left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right)} r' - r_c'^4 \\ & \left. + 2 \left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right) - 8 r_c' \sqrt{\left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

となる。ここで、 $h_c$  は水路中心の水深である。流速分布と同様に、 $r_c'$  の大きい場合についてはつぎのように近似できる。

$$\begin{aligned} 2 \leq r_c' < 5 : \quad \frac{h-h_c}{B} \div & \frac{g i^2 B^3}{36 C_1^2} \left\{ r'^4 - \left( 2 r_c'^6 - \frac{9}{20} r_c'^4 \right) \frac{1}{r'^2} \right. \\ & \left. + 8 \left( r_c'^3 - \frac{9}{80} r_c' \right) r' - 7 r_c'^4 + \frac{9}{10} r_c'^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

$$r_c' \geq 5 : \quad \frac{h-h_c}{B} \div \frac{g i^2 B^3}{36 C_1^2} \left( r'^4 - \frac{2 r_c'^6}{r'^2} + 8 r_c'^3 r' - 7 r_c'^4 \right) \quad (4.3.16)$$

$$r_c' > 15 : \quad \frac{h-h_c}{B} = \frac{4 g i^2 r_c'^3}{9 C_1^2} (r' - r_c') \quad (4.3.17)$$

以上より、流速分布  $U/U_c$  は  $r_c'$  だけによつて決まり、水面形  $\frac{h-h_c}{B}$  は定数  $C_1$  を  $V$  の測定値あるいは  $U$  の測定値から求めることによつて定まる。

(II)  $l_1 = i c r_c / r$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合  
(4.2.15), (4.3.1) および (4.3.2) 式を解いて流速、水深の関数形を求めるとつぎのようになる。

$$V = D_1 / r \quad (4.3.18)$$



$$U = \frac{g r_c i_c}{2 D_1} \cdot r + \frac{D_2}{r} \quad (4.3.19)$$

$$h = \frac{g r_c^2 i_c}{8 D_1^2} \cdot r^2 - \frac{D_1^2 + D_2^2}{2 g} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{D_2 r_c i_c}{D_1} \cdot \ln r + D_3 \quad (4.3.20)$$

ここで、 $D_1, D_2, D_3$  は積分定数である。

(I)と同様に、積分定数を定めるために、水深に関する(III)の仮定を用いると、 $D_1, D_2$  の関係として次式が得られる。

$$D_1 D_2 = -4 g B^3 i_c r_c'^3 \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right) F_1(K) \quad (4.3.21)$$

ただし、

$$F_1(K) = -K \pm \sqrt{K^2 + \frac{1}{192 r_c'^2 (r_c'^2 - 1/4)}} \quad (4.3.22)$$

$$K = \ln \left\{ \frac{1}{r_c'} \left( \frac{r_c' + 1/2}{r_c' - 1/2} \right)^{r_c'} \cdot \sqrt{r_c'^2 - 1/4} \right\} - 1$$

である。(4.3.22)式の複号はそれぞれ $D_1 D_2 \leq 0$ に対応するが、上層の流れで $U > 0, V > 0$ の条件を用いると、負符号がこれを満足する。したがって、(4.3.21)式で $D_1 D_2 > 0$ となる関係を用いて流速分布式を表わすところになる。

$$\frac{U}{U_c} = \frac{8 r_c'^2 (r_c'^2 - 1/4) F_2(K) / r' + r'}{8 r_c' (r_c'^2 - 1/4) F_2(K) + r_c'} \quad (4.3.23)$$

ただし、

$$F_2(K) = K + \sqrt{K^2 + \frac{1}{192 r_c'^2 (r_c'^2 - 1/4)}}$$

一方、水面形の式は

$$\begin{aligned} \frac{h - h_c}{B} = & \frac{g i_c^2 B^3}{8 D_1^2} r_c'^4 \left\{ \left( \frac{r_c'^2}{r_c'^2} - 1 \right) - 64 \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right)^2 F_2^2(K) \left( \frac{r_c'^2}{r_c'^2} - 1 \right) \right. \\ & \left. - 32 \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right) F_2(K) \ln r' / r_c' \right\} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

と表わされる。

以上の式では、 $F_2(K)$  の関数形が複雑なので、近似式の表示ができないが、(I)の場合と同様の手法でその分布形が決定される。次項以下において、(I)の場合と合せて流速分布および水面形の式の特性を検討し、実験値と比較する。

## (2) 自由渦理論との比較

一般に、境界層理論では、上層の流れはポテンシャル流として取り扱われるので上層部に対して自由渦理論を適用する研究もなされている。しかし、上層で二次流の影響を無視できない場合には、すでに検討したように自由渦の分布が適合しなくなる。ここでは、前項の誘導結果と自由渦理論のそれとを比較し、主流の流速および水深の変化に対する二次流の効果を明らかにする。

まず、前項の(1) の場合について、流れの渦度成分を求めると、(4・3・3)、(4・3・4)式より

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur) = -\frac{gi}{v} = -\frac{gi}{c_1 r}$$

となり、鉛直方向の渦度成分が内岸から外岸へ直線的に増加する回転流を表わしている。

つぎに、第1章に述べた自由渦理論の結果と比較すると、主流の流速分布式に関しては、(1・2・2)式に(4・3・4)式の右辺第1項  $gir/3c_1$ 、 $>0$  が付加された関数形になつており、二次流の存在によつて外方へ流速が増加することが分る。また、水深の変化に対しては、(4・3・5)式より彎曲部における内岸と外岸の水位差を求めると、

$$\Delta h = [h]_{r_1}^{r_2} = \left[ \frac{g i^2}{36 C_1^2} r^4 - \frac{C_1^2 + C_2^2}{2 g r^2} + \frac{2 i C_2}{3 C_1} r \right]_{r_1}^{r_2}$$

となり、(1・2・4)式と比較して、

$$\left[ \frac{g i^2}{36 C_1^2} r^4 - \frac{C_1^2}{2 g r^2} + \frac{2 i C_2}{3 C_1} r \right]_{r_1}^{r_2} > 0$$

が付加された形になっている。したがって、二次流によつて水位差は増大することを示している。

一方、(Ⅱ)の場合では、(4・3・18)、(4・3・19)式より、流れの渦度成分は

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{i_c r_c}{D_1}$$

となり、鉛直方向に一定の渦度をもつ回転流を表わしている。また、流速分布および内、外岸の水位差について自由渦理論と比較すると、それぞれ

$$(g r_c i_c / 2 D_1) r > 0$$

$$\left[ \frac{g i_c^2 r_c^2}{8 D_1^2} r^2 - \frac{D_1^2}{2 g} \frac{1}{r^2} + \frac{D_2 r_c i_c}{D_1} \cdot \ln r \right]_{r_1}^{r_2} > 0$$

が付加されており、(Ⅰ)と同様に流速が外方へ増加し、水位差は増大することを示している。

以上の二次流の効果は、第1章第2節、第3節に述べた横断水面形および彎曲部後半部の主流の流速分布に関する実験結果に対応しているようにみえる。

しかし、水位差に関しては、逆に減少するという考察もなされており、<sup>4)</sup> 一般的な結論をうるにはさらに検討する必要がある。

### (3) 流速分布式の検討と計算例

(1)、(2)で述べた主流の流速分布式の特徴を明らかにするために、流速の極値の存在範囲を検討し、分布形について二、三の計算例を示そう。

(I)  $\ell_1 = i$ ,  $\ell_2 = 0$ ,  $\ell_3 = -1$  の場合

まず、主流の流速が外方へ増加する傾向を明らかにするために、 $dU/dr$  の特徴を検討する。(4・3・4)式より  $dU/dr$  を求め、(4・3・6)式を代入すると、

$$\frac{dU}{dr} = \frac{2\pi i}{3C_1 r^2} \left\{ r^2 - \frac{1}{2} B^3 r_c' \sqrt{\left(r_c'^2 + \frac{1}{40}\right)\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)} \right\}$$

となる。したがって、 $dU/dr \geq 0$  の条件は

$$r^2 \geq \frac{1}{2} r_c' \sqrt{\left(r_c'^2 + \frac{1}{40}\right)\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)} \quad (4 \cdot 3 \cdot 25)$$

で与えられる。また、

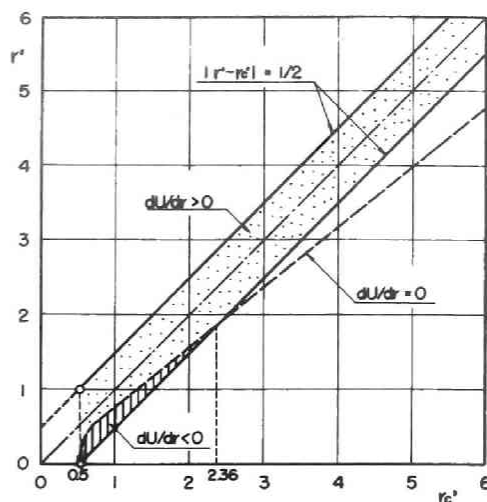
$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{2\pi i}{3C_1} \left\{ 1 + \frac{r_c'}{r^3} \sqrt{\left(r_c'^2 + \frac{1}{40}\right)\left(r_c'^2 - \frac{1}{4}\right)} \right\} > 0$$

であるから、(4・3・25)式の等号はUが最小となる $r'$ の値を示している。

(4・3・25)式の関係および $r'$ の変数範囲を図示すると図-4・3・4のようになる。図から明らかなように、Uの分布形は $r_c'$ の増加にともなつて  $dU/dr \geq 0$  の領域から全域  $dU/dr > 0$  となる領域へ移行することが分る。

$dU/dr > 0$  の領域は、第1章で述べたように従来より多くの実験によつて確認されており、強制渦分布が仮定されている。

一方、 $\frac{dU}{dr} \gtrless 0$  の領域は実証されていないが、内岸よりで自由渦、外岸よりで強制渦に似た分布を示しており、遷移領域の分布を示すと考えられる。しかし、 $r'_c$  が小さい範囲なので、はくり現象を伴う場合が多く、こうした分布形の安定性について今後検討する必要がある。



つぎに、流速の最大値、最小値について検討してみる。

図-4.3.4  $\frac{dU}{dr} \gtrless 0$  の範囲 (I)

全域  $\frac{dU}{dr} > 0$  となる限界の  $r'_c (=r'_{co})$  を (4.3.25) 式および  $|r' - r'_c| \leq 1/2$  から求めると、

$$4(r'_{co} - 1/2)^6 = r'_{co} (r'_{co}{}^2 + 1/40)(r'_{co} - 1/4)$$

より  $r'_{co} \doteq 2.36$  となる。したがって、 $0.5 < r'_c \leq 2.36$ ,  $2.36 \leq r'_c$  の範囲に分けて流速の最大値、最小値を定めることができる。

(I)  $0.5 < r'_c \leq 2.36$ : 最小値は (4.3.4) 式、(4.3.6) 式よりつぎのようになる。

$$U_{min} = \frac{g l B^2}{3 C_1} \left\{ r'_c + r'_c \sqrt{(r'_c{}^2 + \frac{1}{40})(r'_c{}^2 - \frac{1}{4})} \frac{1}{r'_c} \right\} \quad (4.3.26)$$

ただし

$$r'_c = \sqrt[6]{r'_c{}^2 (r'_c{}^2 + 1/40)(r'_c{}^2 - 1/4) / 4}$$

最大値は内岸あるいは外岸に存在し、その限界は内、外岸の流速  $U_1, U_2$  を等値して求まる。すなわち

$$U_2 - U_1 = \frac{C_2}{12(r_{c1}'^2 - 1/4)B} \left\{ 8 \frac{r_{c1}'^2 - 1/4}{\sqrt{(r_{c1}'^2 + 1/40)(r_{c1}'^2 - 1/4)}} - 4 \right\} = 0$$

より、 $r_{c1}' = 0.585$  となる。したがって、最大値は次式で与えられる。

$$0.5 < r_c' \leq 0.585$$

$$U_{\max} = U_1 = \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \frac{(r_c' - 1/2)^3 + r_c' \sqrt{(r_c'^2 + 1/40)(r_c'^2 - 1/4)}}{r_c' - 1/2} \right\} \quad (4.3.27)$$

$$0.585 \leq r_c' \leq 2.36$$

$$U_{\max} = U_2 = \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \frac{(r_c' + 1/2)^3 + r_c' \sqrt{(r_c'^2 + 1/40)(r_c'^2 - 1/4)}}{r_c' + 1/2} \right\} \quad (4.3.28)$$

(ii)  $2.36 \leq r_c'$

この範囲では、 $dU/dr > 0$  なので、最大値は (4.3.27) 式  
最小値は (4.3.28) 式で与えられる。

以上に挙げた  $r_c'$  の代表値、

$$r_{c1}' = 0.585, \quad r_{c0}' = 2.36$$

および  $r_c' = 5$  の場合につ

いて、(4.3.10), (4.

3.11) 式より流速分布形を

求め図示すると、図-4.3.

5 のようになる。

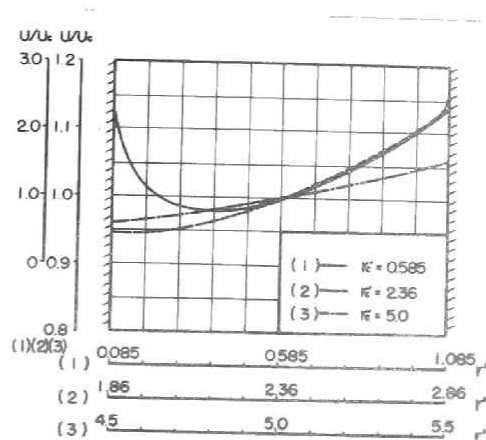


図-4.3.5

流速分布の計算例(I)

図より、 $dU/dr \geq 0$ ,  $dU/dr \geq 0$ ,  $dU/dr > 0$  の各領域における流速分布形を把握できる。

(II)  $l_1 = r_c l_c / r$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合

(4.3.19) 式より  $dU/dr$  を求め、(4.3.21) 式の関係

( $D_1, D_2 > 0$ ) を用いると、

$$\frac{dU}{dr} = \frac{g l_c r_c}{2 D_1^2 r^2} \left\{ r'^2 - 8 r_c'^2 (r_c'^2 - 1/4) F_2(K) \right\} \quad (4.3.29)$$

となる。したがって、 $dU/dr \geq 0$  の条件は

$$r' \geq \sqrt{8 r_c'^2 (r_c'^2 - 1/4) F_2(K)} \quad (4.3.30)$$

で表わされ、等号はUの最小となる

条件である。上式の関係を図示する

と図4.3.6のようになり、内岸

で  $dU/dr = 0$  となる  $r_c'$  の限

界値は  $r_c' = 1.12$  である。

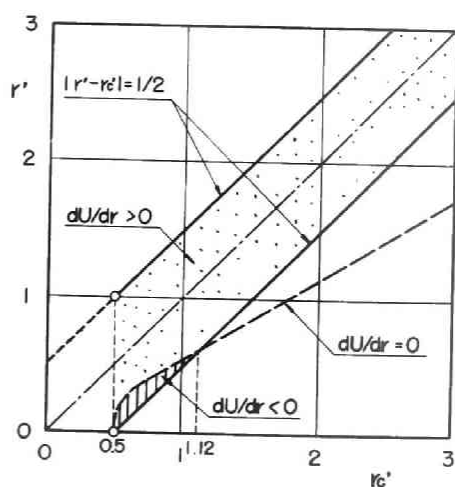
すなわち、流速分布は

$0.5 < r_c' < 1.12$  :

$$dU/dr \geq 0$$

$r_c' > 1.12$

$$dU/dr > 0$$



となり、(I)の場合と同様な特性

を示している。

図-4.3.6

$$\frac{dU}{dr} \geq 0 \text{ の範囲 (II)}$$

#### (4) 水面形の式の検討と計算例

開水路彎曲流の横断水面形は、横断方向の路床こう配が0の場合  $dh/dr > 0$  であるが、水面の曲率  $d^2h/dr^2$  の符号は流速分布の特性によつて異なり、水面形の特性を表わす一つの指標になると考えられる。こうした考えから、ここでは(2)で誘導した水面形の式について、彎曲部の曲率と  $d^2h/dr^2$  の符号の關係を検討する。

(1)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -1$  の場合

(4・3・5)式より  $d^2h/dr^2$  を求め、(4・3・6)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2h}{dr^2} &= \frac{g\zeta^2}{3C_1^2} \left\{ r^2 - \frac{9C_1^2(C_1^2 + C_2^2)}{g^2\zeta^2 r^4} \right\} \\ &= \frac{g\zeta^2}{3C_1^2 r^4} \left\{ r^6 - B^6 r_c'^2 \left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

となり、 $d^2h/dr^2 \geq 0$  の条件は

$$r'^3 \geq r_c' \sqrt{\left( r_c'^2 + \frac{1}{40} \right) \left( r_c'^2 - \frac{1}{4} \right)} \quad (4・3・31)$$

で与えられる。上式の關係を図示すると、図-4・3・7のようになり、 $r_c' > 0.5$  のすべての彎曲部に対して、水面形は  $d^2h/dr^2 \geq 0$  の特性を示す。すなわち、内岸よりで凸水面、外岸よりで凹水面となり、変曲点の位置は  $r_c' \geq 5$  でほぼ水路の中心線と一致する。

自由渦、強制渦の水面形は、第1章第2節(2)の検討から明らかなように、それぞれ  $d^2h/dr^2 < 0$ ,  $d^2h/dr^2 > 0$  の特性を持っており、この場合の水面形は両者が合成された特性を示している。



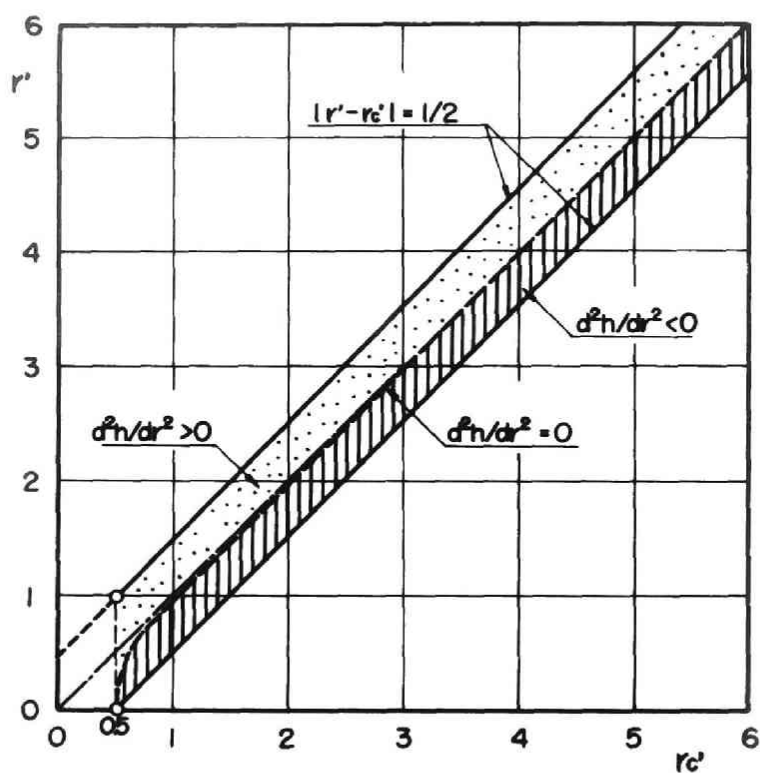


図-4.3.7

$d^2h/dr^2 \gtrless 0$  の範囲(I)

つぎに、前項の流速分布の計算例と対応させて、 $r'_c = 0.585, 2.36, 5$  の場合の水面形を(4.3.14), (4.3.15)式から計算すると図-4.3.8のようになる。

ただし、 $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ ,  $i = 2 \times 10^{-3}$ ,  $B = 25 \text{ cm}$ ,  
 $r'_c = 0.585, 2.36, 5$  ;  $C_1 = 10, 10^2, 10^{5/2}$   
 の条件を用いている。

図から明らかなように、 $r'_c$  の小さい場合は、水面の曲率の変化が顕著で上述の特性が認められる。

しかし、通常観察される  $r'_c$  の大きい場合は、その変化が極めて微妙なので実験的検証は難しいと考えられる。

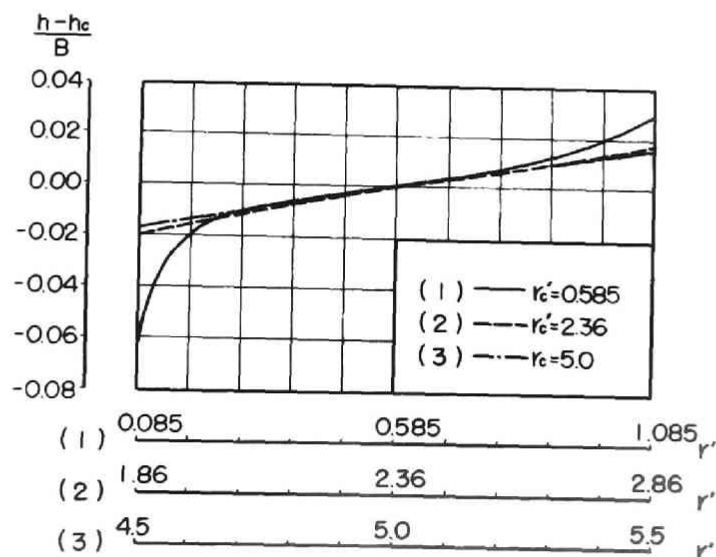


図-4.3.8 水面形の計算例(I)

(II)  $l_1 = i_c r_c / r$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合

(4.3.20) 式から  $d^2h/dr^2$  を求め、(4.3.21) 式  
 の関係 ( $D_1, D_2 > 0$ ) を用いると、 $d^2h/dr^2 \geq 0$  の条件は次のように表わ  
 される。

$$r' \geq \sqrt{8(1+\sqrt{2})r_c'^2(r_c'^2 - 1/4)F_2(K)} \quad (4.3.32)$$

上式の関係を図示すると、図 4.3.

9 のようになり、この場合  $d^2h/dr^2=0$   
 の曲線は  $r_c' = 4.25$  で内岸の境界線  
 と交わる。したがって、水面形は  
 $0 < r_c' < 4.25$  の範囲で、(I) の場  
 合と同様な特性を示し、 $r_c' > 4.25$   
 の範囲で強制渦に似た凹水面になる  
 ことが分る。

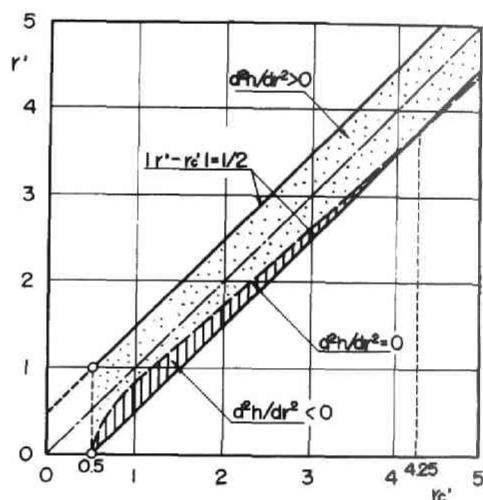


図-4.3.9  $d^2h/dr^2 \geq 0$

(5) 側壁近くに対する補正

の範囲(Ⅲ)

彎曲水路の側壁近くの流れに対しては、粘性の影響および鉛直方向の二次流を考慮する必要がある。しかし、第1章第3節の実験結果にみられるように、彎曲部後半で鉛直方向の二次流は半径方向の二次流に比して分布特性が明確でなく、側壁近くの流れに境界層の取扱いを適用することは疑問であり、また、解析的にも極めて難しい。したがって、ここでは粘性の影響だけを考え、上層の流れの基礎式として(4.2.15)、(4.3.1)、(4.3.2)式の代りに、もとの(4.2.12)、(4.2.13)、(4.2.15)式を用

いて側壁近くの補正式を導くことにする。

いま、 $l_1 = i$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合について考えると、  
(4.2.12)、(4.2.15) 式より、 $U$  に関する式は

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left(1 - \frac{C_1}{v}\right) \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \left(1 + \frac{C_1}{v}\right) \frac{U}{r^2} + \frac{g_i}{v} = 0 \quad (4.3.33)$$

となり、上式の一般解はつぎのように表わされる。

$$U = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-1} + A r^2 \quad (4.3.34)$$

ここで、 $\lambda = 1 + C_1/v$ ,  $A = -g_i/3(C_1 - v)$ ,  $A_1, A_2$  は積分定数である。また (4.2.13)、(4.2.15)、(4.3.34) 式から  $h$  を求めると、

$$h = \frac{1}{4g\lambda(\lambda-1)} \left\{ 2(\lambda-1)A_1^2 r^{2\lambda} + 8(\lambda-1)AA_1 r^\lambda + 8\lambda A_1 A_2 r^{\lambda-1} + \lambda(\lambda-1)K^2 r^4 - 2\lambda(\lambda-1)(A_2^2 + C_1^2) r^2 + 8\lambda(\lambda-1)AA_2 r \right\} \quad (4.3.35)$$

となる。(4.3.34)、(4.3.35) 式は関数形からみて明らかなように、壁面近くにだけ適合するので、境界条件は内岸、外岸近くでそれぞれ別個に与えねばならない。ここでは、内岸近くの流速に対しての関数形を示すことにする。

内岸近くで、(4.3.34) 式に対して、 $r = r_1$  で  $U = 0$ 、 $r = r_1 + \varepsilon_1$  で  $U = U_1'$  を用いると、積分定数  $A_1, A_2$  はつぎのように表わされる。

$$A_1 = \frac{A \{ r_1^3 - (r_1 + \varepsilon_1)^3 \} + (r_1 + \varepsilon_1) U_1'}{(r_1 + \varepsilon_1)^{\lambda+1} - r_1^{\lambda+1}} \quad (4.3.36)$$

$$A_2 = \frac{A \{ r_1^{\lambda+1} (r_1 + \varepsilon_1)^3 - r_1^3 (r_1 + \varepsilon_1)^{\lambda+1} \} - r_1^{\lambda+1} (r_1 + \varepsilon_1) U_1'}{(r_1 + \varepsilon_1)^{\lambda+1} - r_1^{\lambda+1}} \quad (4.3.37)$$

$r_1 \gg \varepsilon_1$  を考えて、(4.3.34), (4.3.36), (4.3.37)より  $U$  の近似式を求めると、

$$U = \frac{1+\lambda y_1/2}{1+\lambda y_1'/2} \frac{(1+y_1')y_1'}{(1+y_1')y_1'} U_1' \quad (4.3.38)$$

で表わされる。

ここで、 $\lambda = 1 + C_1/\mu$ ,  $y' = r/r_1 - 1$ ,  $y_1' = \varepsilon_1/r_1$  である。

#### (5) 実験値との比較

##### (i) 90° 彎曲水路の実験値との比較

(i-1) 流速分布：まず、(I)  $l_1 = i$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合の理論式(4.3.10)式は  $r_c = 25 \text{ cm} \sim 100 \text{ cm}$  ( $r_c' = 1 \sim 4$ ) の4種に対して、それぞれつぎのように与えられる。

$$r_c' = 1 ; \quad \frac{U}{U_c} = 0.533 r'^2 + 0.467 \frac{1}{r'} \quad (4.3.39)$$

$$0.5 \leq r' \leq 1.5$$

$$r_c' = 2 ; \quad \frac{U}{U_c} = 0.127 r'^2 + 0.985 \frac{1}{r'} \quad (4.3.40)$$

$$1.5 \leq r' \leq 2.5$$

$$r_c' = 3 ; \quad \frac{U}{U_c} = 0.0558 r'^2 + 1.49 \frac{1}{r'} \quad (4.3.41)$$

$$2.5 \leq r' \leq 3.5$$

$$r_c' = 4 ; \quad \frac{U}{U_c} = 0.0314 r'^2 + 1.99 \frac{1}{r'} \quad (4.3.42)$$

$$3.5 \leq r' \leq 4.5$$

一方、(II)  $l_1 = i_c r_c / r$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = -1$  の場合は (4.3.23) 式より、

$$r'_c = 1 : \quad \frac{U}{U_c} = 0.769 r' + 0.229 \frac{1}{r'} \quad (4.3.43)$$

$$r'_c = 2 : \quad \frac{U}{U_c} = 0.377 r' + 0.490 \frac{1}{r'} \quad (4.3.44)$$

$$r'_c = 3 : \quad \frac{U}{U_c} = 0.250 r' + 0.744 \frac{1}{r'} \quad (4.3.45)$$

$$r'_c = 4 : \quad \frac{U}{U_c} = 0.940 r' + 1.06 \frac{1}{r'} \quad (4.3.46)$$

となる。ただし、各  $r'_c$  に対する  $r'$  の範囲は、(4.3.39) 式 ~ (4.3.42) 式に対応する。

常流状態で行なつた実験値を上記の理論式と比較すると、 $r'_c = 1 \sim 4$  に対してそれぞれ図-4.3.10 (a)~(d) のようになる。実験値は  $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$  の三断面で  $z = h/2$  の値である。

これらの図には、比較のために自由渦

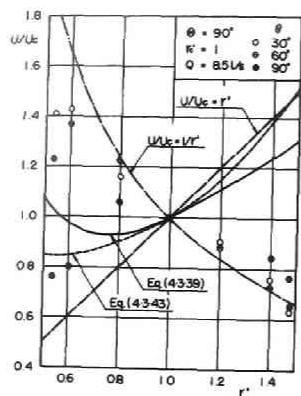
$$U/U_c = r'_c / r'$$

および強制渦の流速分布

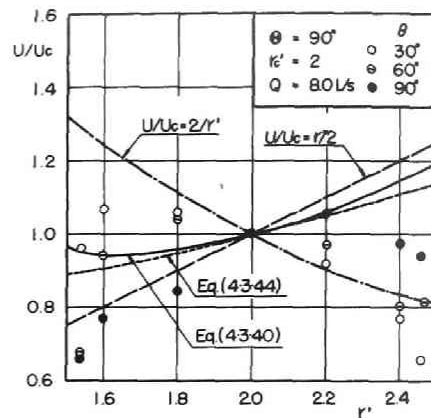
$$U/U_c = r' / r'_c$$

の曲線がそれぞれ鎖線、破線で示されている。

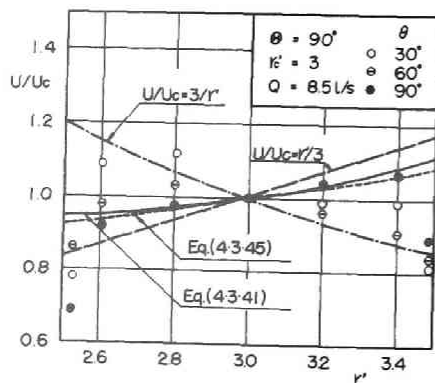
図-4.3.10 (a)、(b) にみられるように、 $r'_c = 1$ ,  $r'_c = 2$  の場合は、 $\theta = 90^\circ$  の断面においても本理論の流速分布式との差が大きく、完全発達域の近似はできないと考えられる。



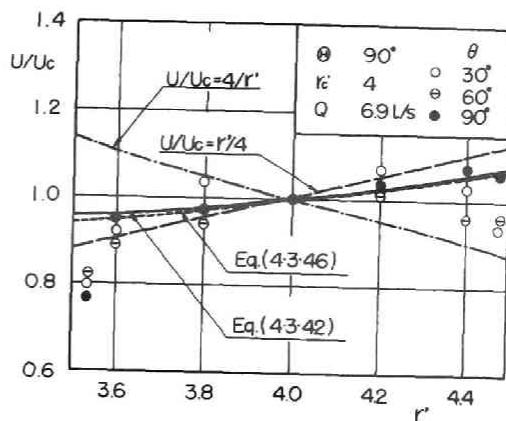
(a)



(b)



(c)



(d)

図-4.3.10 (a) ~ (d) 流速分布の理論曲線と実験値との比較

一方、 $r'_c = 3$ ,  $r'_c = 4$  の場合は、 $\theta = 90^\circ$  の断面で内、外岸近くの流速値2点を除いて、ほぼ本理論式と一致しているのがわかる。また、各理論式と実験値との適合度を比較してみると、強制渦の流速分布形は(4.3.10)、(4.3.23)式にもとづく曲線よりこう配が急になっており、測定値からはなれるようである。しかし、(4.3.10)式と(4.3.23)式

との差は  $r'_c = 3, 4$  いずれの場合もわずかであつて、測定値から両式の優劣は判定できない。

(i-2) 水面形： 水面形の式は、(I) (II) の場合について、それぞれ (4.3.14) 式、 (4.3.24) 式で与えられる。これらの式の未知定数  $C_1$ 、 $D_1$  は水理条件に関係すると考えられるが、一般的な関係が明らかでないので、 $U$  の測定値と理論式の関係より求める。すなはち、 $C_1$  は  $U$  の測定値を (4.3.4.) 式に代入し、(4.3.7) 式の関係を用いることによつて決まる。同様に、 $D_1$  は (4.3.19) 式、(4.3.21) 式と  $U$  の測定値から与えられる。しかし、このような方法をとするには、前提として、 $U$  が (4.3.10) 式であるいは (4.3.23) 式の分布形になることが必要である。したがつてこの場合  $r'_c = 3, 4$  の場合で  $\theta = 90^\circ$  の断面に限定される。

以上の方法で求めた水面形の式と実測値とを比較した結果が図-4.3.11 (a), (b) に示されている。(4.3.14) 式が (4.3.24) 式との差はほとんどなく、しかも直線分布に近くなる。実験値との対応もよいが、内、外岸の水位差が 5mm 程度なので、水面形状を検討するのは難しいと思われる。

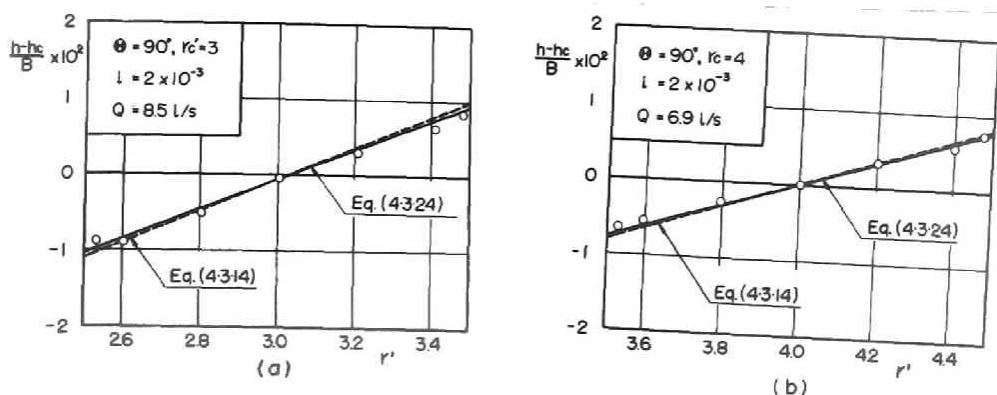


図-4.3.11(a) (b) 水面形の理論曲線と実験値との比較



(ii) 180° 彎曲水路の実験値との比較

(ii-1) 流速分布:  $r = 75^{cm}$  ( $r'_c = 1.5$ ) の場合について流速分布式を求めると、(I), (II) に対してそれぞれつぎのように与えられる。

$$r'_c = 1.5, \quad \frac{U}{U_c} = 0.228 r'^2 + 0.731 \frac{1}{r'} \quad (4.3.47)$$

$$\frac{U}{U_c} = 0.504 r' + 0.362 \frac{1}{r'} \quad (4.3.48)$$

$$1.0 \leq r' \leq 2.0$$

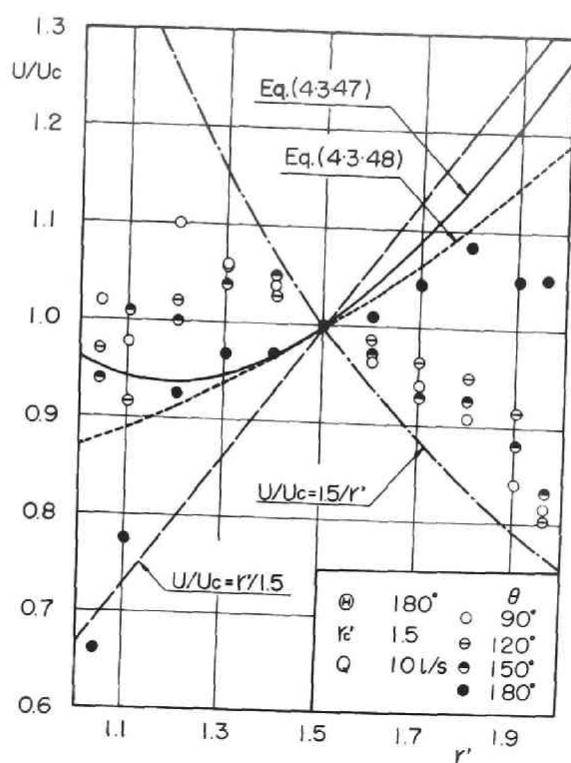
$r_c = 150^{cm}$  の場合は  $r'_c = 3$  であるから、上式に対応する式は (4.3.41) 式, (4.3.45) 式で表わされる。

これらの式を彎曲部後半の断面の実験値と比較すると、 $r'_c = 1.5, 3$  に対してそれぞれ図-4.3.12 (a) (b) のようになる。

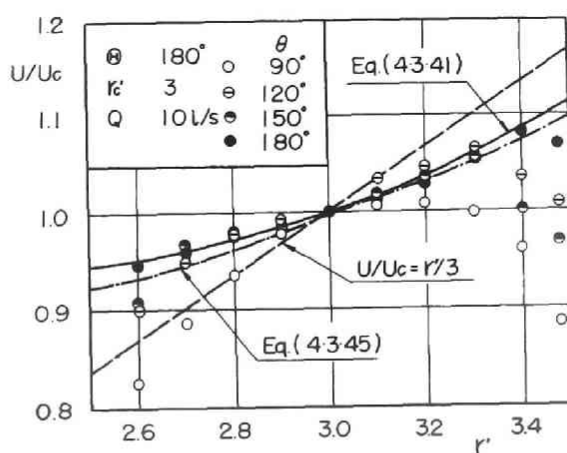
$r'_c = 1.5$  の場合は、 $\theta = 180^\circ$  の断面で、流速の分布形が変り、(4.3.47)、(4.3.48) 式に接近するが、なお完全発達域としての近似は難しいと考えられる。

一方、 $r'_c = 3$  の場合は、 $\theta = 120^\circ \sim 180^\circ$  の断面で、側壁付近を除けば、(4.3.41)、(4.3.45) 式で近似できるといえよう。また、両式は水理条件に無関係な関数形となつてゐるが、この点を検討するために、 $r'_c = 3$  の  $\theta = 150^\circ$  の断面、 $Q = 5 \sim 30 \text{ l/s}$  の測定値と比較すると図-4.3.13 のようになる。測定値は流量によつて変化する様子はなく、両式が適用できると考えられる。

(ii-1) 水面形: (i) と同様の手法を用いて図-4.3.13 に示した  $U$  の測定値より  $C_1$  を決定し、(4.3.14) 式と実測の水面形と比較した結果が図-4.3.14 に示されている。 $Q = 10 \sim 20 \text{ l/s}$  では、側壁近くの測定値のばらつきが大きいため、水面形は明確でないが、平均的には測定値



(a)



(b)

図-4.3.12(a)(b) 流速分布の理論曲線と実験値との比較

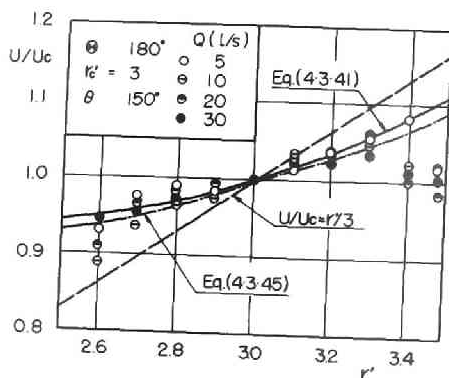


図-4.3.13 流速分布の理論曲線と実験値との比較

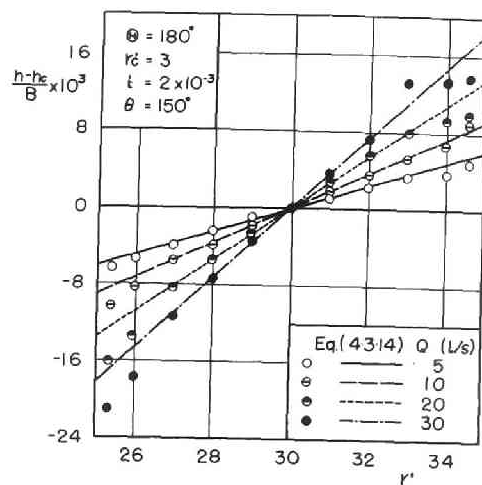


図-4.3.14 水面形の理論曲線と実験値との比較

に一致していると考えられる。

## 第4節 下層部に関する考察

下層部の流れを決定する基礎式は、第2節で述べたように

(a) 上、下層の連続関係： (4.2.14) 式

(b) 下層の流れの運動量式： (4.2.9) 式および (4.2.10) 式

の三式である。したがって、境界層理論による場合は、下層の流れに対して三つの水理量を選定する必要がある。しかし、(a) だけを考慮し、一つの水理量を取り扱う解析も考えられる。

本節では、この二つの解析法で、つぎの水理量および仮定を用いた場合について検討する。

(I) (a) の基礎式のみ考慮し、水理量として下層の厚さ  $\delta(r)$  を対象と

する。また、下層の半径方向の流速分布は相似になると仮定する。

(II) (a)、(b)の基礎式を考慮し、水理量として、下層部の厚さ  $\delta(r)$ 、二次流の最大流速  $U_0(r)$  ( $< 0$ ) および最大流速を生ずる位置  $\delta_0(r)$  を対象とする。

なお、従来においては、岩垣は (b) の条件を用い  $\delta(r)$ 、 $U_0(r)$  を変数としており、岸、小川は (a)、(b) の条件を用い、岩垣と同じ変数を取り扱っている。しかし、上にのべた理由から、後者では矛盾した結果を導いていると考えられる。

#### (1) 下層の流れの解析 (I)

下層の流速  $u$ 、 $v$  に対する境界条件をつぎのように考える。

$$z = 0 \quad , \quad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad (4.4.1)$$

$$z = \delta_0 : \quad v = 0 \quad (4.4.2)$$

$$\begin{aligned} z = \delta : \quad u = U \quad , \quad \frac{du}{dz} = 0 \\ v = V \quad , \quad \frac{dv}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

(4.4.3) 式は第1節で述べた、上、下層の境界面における流速の連続性の条件である。

いま、 $z/\delta = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とし、(4.4.1) 式と境界条件の数を考慮して、 $u$ 、 $v$  をつぎのように仮定する。

$$u(r, z) = U(r)f(t) = U(r)(a_1 t + b_1 t^2) \quad (4.4.4)$$

$$v(r, z) = V(r)g(t) = V(r)(a_2 t + b_2 t^2 + c_2 t^3) \quad (4.4.5)$$

ここで、 $a_1, b_1, a_2, b_2, C_2$  は定数である。

つぎに、境界条件 (4.4.2)、(4.4.3) 式を用いて係数を定めると、

$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1.$$

$$a_2 = \frac{2t_1^2 - 3t_1}{(1-t_1)^2}, \quad b_2 = \frac{3-t_1^2}{(1-t_1)^2}, \quad C_2 = \frac{t_1 - 2}{(1-t_1)^2}$$

となる。ここで、 $t_1 = \delta/\delta$  であつて、前述の境界面の条件より

$t_1 \neq 1$  である。

一方、上、下層の連続関係 (4.2.14) 式は

$$V(h-\delta) + \int_0^\delta v \, dz = 0 \quad (4.4.6)$$

で表わされる。これに (4.4.5) 式を代入し、 $h$  と  $\delta$  の関係を求めると、

$$\delta = \frac{1}{1 - g_1(t_1)} h \quad (4.4.7)$$

$$g_1(t_1) = \int_0^1 g(t) \, dt = \frac{8t_1^4 - 15t_1 + 6}{12(1-t_1)^2} \quad (4.4.8)$$

が得られる。ここで、 $t_1$  および  $g_1(t_1)$  は (1) の仮定によつて定数とみなせる。 $t_1$  の範囲は (4.4.7) 式および (4.4.8) 式で  $h > \delta$  を考えると  $g_1(t_1) < 0$  より  $1 > t_1 > 0.577$  となる。

$\delta/h$  と  $t_1$  との関係を図示すると、図-4.4.1のように表わされる。

また下層における  $v$  の最大値  $v_0$  およびその位置  $t_0 (= \delta/\delta)$  は (4.4.5) 式より

$$\frac{v_0}{V} = \frac{1}{(1-t_1)^2} \left\{ t_1(2t_1-3)t_0 + (3-t_1^2)t_0^2 + (t_1-2)t_0^3 \right\} \quad (4.4.9)$$

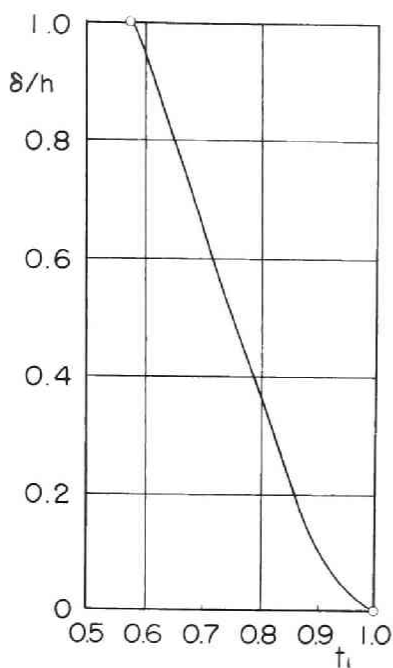


図-4.4.1  $\delta/h \sim t_1$  の関係

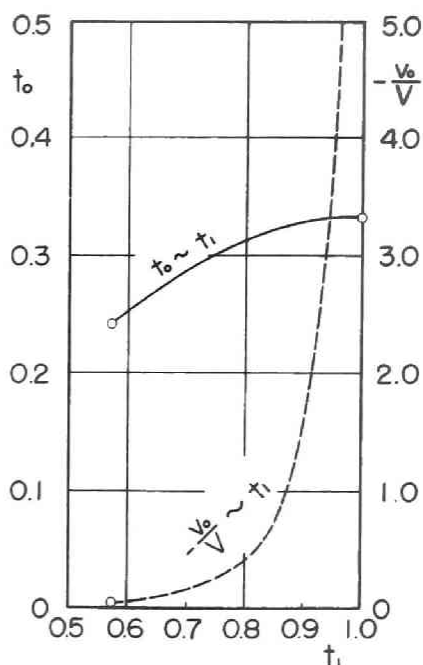


図-4.4.2  $t_1 \sim v_0/V, t_0 \sim t_1$  の関係

$$t_0 = \frac{t_1^2 - 3 + \sqrt{(3 - t_1^2)^2 - 3t_1(2t_1 - 3)(t_1 - 2)}}{3(t_1 - 2)} \quad (4.4.10)$$

で与えられる。 $t_0 \sim t_1$ ,  $v_0/V \sim t_1$  の関係を図示すると、図-4.4.2のようになる。

以上、この解析法では  $t_1$  を仮定することによつて、上層の  $h, U, V$  から下層の  $\delta, u, v$  を求めることができる。

## (2) 下層の流れの解析 (II)

上述の (II) の条件にもとづいて、流速  $u, v$  の境界条件を次のように

考える。

$$Z=0 : \quad u=0, \quad v=0 \quad (4.4.11)$$

$$Z=\delta_0 : \quad v=v_0, \quad dv/dZ=0 \quad (4.4.12)$$

$$Z=\delta : \quad u=U, \quad du/dZ=0 \\ v=V, \quad dv/dZ=0 \quad (4.4.13)$$

$u$  分布は (4.4.4) 式と同様で

$$U(r, Z) = U(r) \cdot \varphi(t) = U(r) \cdot (2t - t^2) \quad (4.4.14)$$

となり、 $v$  分布はつぎの三次式を仮定する。

$$V(r, Z) = V(r) \cdot \psi(t) = V(r) \cdot (a_3 t + b_3 t^2 + c_3 t^3) \quad (4.4.15)$$

境界条件 (4.4.12), (4.4.13) 式より定数を決定すると

$$a_3 = \frac{1}{t_0^2(1-t_0)^2} \left\{ t_0^4 + (3t_0^2 + 2t_0) \frac{v_0}{V} \right\}$$

$$b_3 = \frac{1}{t_0^2(1-t_0)^2} \left\{ -2t_0^3 + (1-3t_0^2) \frac{v_0}{V} \right\}$$

$$c_3 = \frac{1}{t_0^2(1-t_0)^2} \left\{ t_0^2 + (2t_0 - 1) \frac{v_0}{V} \right\}$$

となる。

いま、下層の運動量式 (4.2.9), (4.2.10) 式で側壁の影響を無視し、上層の式 (4.3.1), (4.3.2) 式を考慮して変形すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^\delta (UV - uv) dz \right\} - UV \frac{dh}{dr} = -\nu \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} \quad (4.4.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta (V^2 - v^2) dz \right\} - \frac{1}{r} \int_0^\delta (U^2 - u^2) dz - V^2 \frac{dh}{dr} = -\nu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (4.4.17)$$

が得られる。これらの式に (4.4.14), (4.4.15) 式を代入するとそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 UV m_2 \delta) - UV \frac{dh}{dr} = m_3 \nu \frac{U}{\delta} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V^2 m_4 \delta) - m_5 \frac{U^2}{r} \delta - V^2 \frac{dh}{dr} = m_6 \nu \frac{V}{\delta} \end{array} \right. \quad (4.4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 UV m_2 \delta) - UV \frac{dh}{dr} = m_3 \nu \frac{U}{\delta} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V^2 m_4 \delta) - m_5 \frac{U^2}{r} \delta - V^2 \frac{dh}{dr} = m_6 \nu \frac{V}{\delta} \end{array} \right. \quad (4.4.19)$$

また、上、下層の連続関係は

$$V(h - \delta) + m_1 \delta V = 0 \quad (4.4.20)$$

で与えられる。ただし、(4.4.18) ~ (4.4.20) において

$$m_1 = \int_0^1 \psi dt = m_1(t_0, v_0), \quad m_2 = \int_0^1 (1 - \varphi \psi) dt = m_2(t_0, v_0)$$

$$m_3 = \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = 2, \quad m_4 = \int_0^1 (1 - \varphi^2) dt = m_4(t_0, v_0)$$

$$m_5 = \int_0^1 (1 - \varphi^2) dt = 7/5, \quad m_6 = \left( \frac{d\psi}{dt} \right)_{t=0} = m_6(t_0, v_0)$$



である。

結局、(a), (b) の条件は (4.4.18) ~ (4.4.20) 式の三式で表わされる。

以上、二つの解析法を示したが、解析法 (I) では、下層部の流速分布が相似になるという仮定の妥当性および  $\mu$  の特性については実験的に検討する必要がある。また、解析法 (II) では、条件式を満足させた結果、一般解は得られないようであり、現象に準じた近似解法を用いる必要があろう。

## 第 5 節 結 言

二次流の完全発達域は直線流から彎曲流への遷移過程の極限状態であつて、この領域の現象を明らかにすることは彎曲流に一つの基準を与える意味で重要と考えられる。従来よりなされている彎曲流の理論の多くはこの領域を対象としており、その解析法は層流理論と三次元境界層理論に大別できる。

本章の考察では三次元境界層理論に準拠し、特に従来の解析における仮定を明らかにするために上層部の流れの解析に焦点を絞つた。

本章の考察で明らかになつた点および今後の問題点を要約するとつぎのようである。

- 1) 上層部の流れの解析で、重力の方向余弦が (I)  $l_1 = i, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = -1$  (II)  $l_1 = i_c r_c / r, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = -1$  の2つの場合を検討したが、 $r'_c (= r_c / B) \geq 3$  では、流速分布、水面形に対する両者の差は少く、平均路床こう配による (I) の取り扱いで近似できる。
- 2) 従来、上層部の主流に対して仮定されている  $U = aY + b$  ( $a, b$ : 定数) の分布形は  $r'_c \geq 15$  の場合に適用でき、 $U_{1c} = (1 + r'_c) / 2$

で表わされる。

$\gamma'_c$  の小さいときには、(4.3.10) 式あるいは (4.3.23) 式が適用され、内岸近くの流速分布に極小点があらわれる可能性がある。その限界の  $\gamma'_c$  は (I) の場合  $\gamma'_c = 2.36$  (II) の場合  $\gamma'_c = 1.12$  となつたが、彎曲部のはくり限界、流れの安定性より検討する必要がある。

3) 半径方向に卓越した二次流が存在する場合には、自由渦の流速分布、横断水位差に比して、外岸より流速が大きくなり、水位差は増大する。

4) 上層部の流速分布式および水面形の式は、 $90^\circ$  彎曲水路では  $\gamma'_c = 3, 4$  の  $\theta = 90^\circ$  の断面、 $180^\circ$  彎曲水路では  $\gamma'_c = 3$  の  $\theta = 120^\circ \sim 180^\circ$  の範囲で近似的に適用できる。 $U/U_c$  の分布形は主に  $\gamma'_c$  によつて決まり、流量による影響は小さい。

5) 下層部の流れについて、上、下層の接続条件を考慮し、連続条件にもとく解析法と連続および運動量式にもとづく解析法を示した。しかし、下層部の現象についての理論的、実証的検討は今後に残された大きな問題である。

## 参 考 文 献

- 1) 村本嘉雄、石田真一：彎曲部の流れに及ぼす二次流の効果について、  
京大防災研究所年報、第7号 (1964)
- 2) Dean, W.R. : The Stream-Line Motion of Fluid in a  
Curved Pipe. Phil. Mag. S.7, Vol. 5, 673,  
(1928)
- 3) 伊藤英覚 : 楕円及び矩形断面管内の層流理論、速研報告、  
第11巻 第106号 97頁 (1955)
- 4) 鬼頭史城 : 楕円管の横断面内をもつた曲り管内に生ずる副作  
用的流れ、応用力学、第3巻 第16号、  
73頁 (1950)

- 5) Boussinesq, J. : Memoire sur l'influence des frottement  
dans les mouvements réguliers des  
fluides, Journal de mathematiques pures  
et appliquees, deuxieme serie, tome  
x111(1868)
- 6) Adler, M. : Strömung in gekrümmten Rohren, Z. A.  
M. M. Bd. 14, S. 257 (1934)
- 7) Weske, J. R. : Investigations of the Flow in Curved  
Ducts at Large Reynolds Numbers, J.  
Appl. Mech, 15-4, 344 (1948)
- 8) 伊藤英覚 : 曲管の流れに関する理論的並びに実験的研究  
Ⅶ (乱れた曲り流れの管摩擦係数)、速研報告、  
第14巻、第106号(1959)
- 9) Baura, S. N. : On Secondary Flow in Stationary Curved  
Pipes, Quart. J. Mech., Vol. XVI, Part  
1, 61 (1963)
- 10) 森 康夫、中山 恒 : 曲円管内強制対流熱伝達に関する研究 (層流域)、  
機械学会論文集、30-216、977 (1964)
- 11) 森 康夫、中山 恒 : 同上 (乱れ流域)、機械学会論文集、31-230、  
1521 (1965)
- 12) Einstein, H. A. : Velocity Distribution and the Boundary  
& Harder, J. A. Layer at channel Bends, Trans. AGU,  
Vol. 35, No. 1, 114 (1954)
- 13) 岩垣雄一 : 河川彎曲部の底面における流れ、応用水理学中1,  
丸善出版、78-80頁 (1958)
- 14) 岸 力, 小川芳昭 : 開水路 彎曲部の二次流に関する研究、土木学会  
水理講演会講演集, 71-76頁 (1962)

- 15) Muramoto, Y: Flow through Curved Open Channels (Part 1. On the characteristics of upper layer in a fully developed region), Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute Vol. 14, Part 2 (1965)

## 結 論

以上、本論文では、開水路彎曲流の内部機構を統一的に把握し、現象解析の方向を明確にすることを主目的として、詳細な実験的研究を行なうとともに、彎曲流の遷移過程に領域区分を与え、各領域の水理特性を明らかにした。つぎに、これまで述べてきたことを要約して結論とする。

緒論においては、開水路彎曲流の水理特性と実用上の諸問題との関連性および研究の現状について述べ、彎曲流に関する本研究の方向を明らかにした。

第1章においては、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 彎曲水路を用いて実験的研究を行ない、横断水面形、断面平均エネルギーおよび主流、二次流の流速分布特性について詳細な検討を加えた。まず、横断水面形については、とくに、内岸、外岸の最大水位差について、従来用いられている主要な理論式を検討し、実際の水位差を過少評価する危険性を指摘するとともに、その問題点を明らかにした。断面平均エネルギーについては、背水曲線を基準として彎曲部によるエネルギー損失の増加量および影響域の長さを算定し、損失係数がReynolds数とともに減少することを明らかにした。また、エネルギー補正係数および運動量補正係数について検討し、直線流のそれらと著しい差違のないこと、さらに、エネルギー補正係数に対する二次流および横断方向の水位変化の影響も一般に無視できることを指摘した。つぎに、球形ピトー管について、自由表面の影響を除くよう改良を加えるとともに、測定精度について検討し、彎曲流の測定に適することを確認した。また、球形ピトー管に用いて二次流を測定した結果、鉛直方向成分は彎曲部の前半の側壁付近では卓越するが、断面主要部では、半径方向成分に比して無視できることが明らかになった。

第2章においては、彎曲流の内部における流れの運動機構を明確にするために、直線流から彎曲流への遷移過程に領域区分を与えるとともに、解析の方向を提示した。すなわち、流速測定結果から、彎曲部の断面主要部におけ

る渦度の分布を求め、その結果にもとづいて、二次流の発生域（二次元回転流域）、発達域（三次元回転流域）、完全発達域（一次元回転流域）の三領域を定義し、各領域における流れの特性を明らかにした。また、断面内の局所的な渦度分布についても検討し、壁面近傍を除いて、こうした領域区分の有効なることを確かめた。さらに境界条件、水理条件の異なる若干の実験値より、各領域の範囲および特性を検討し、発生域、発達域が主要な領域をなすこと、曲率半径と水路巾との比が支配的な要素であることを指摘した。

第3章においては、二次流の発生域について、主に、二次流の流速分布および発生域の限界について考察するとともに、実験値と比較し、その適用性を吟味した。まず、開水路彎曲流に対する Squire・Winter の概念の適用性を検討するために、渦度保存則より層流、乱流の場合についての二次流の流速分布式を誘導した。実験値との比較は乱流の場合について行ない、断面中央部において、二次流の発生過程の特性と一致することを確認した。さらに、底面摩擦の影響を加味した場合について考察を試み、発生域の限界の角度および限界における二次流の流速分布式を導いた。また Rozovskiï の式とあわせて、彎曲部後半の実験値との比較を行ない、本理論の式で Kármán 定数を補正することによつて、発達域の二次流の流速分布をも近似的に表わせることを明らかにした。

第4章においては、彎曲流の極限状態である二次流の完全発達域について考察し、理論の適用性を第1章の実験結果から詳細に検討した。すなわち、Navier — Stokes の式および連続式より、上層部、下層部の流れの一般式を誘導し、まず、上層部の流れについて平均路床こう配を用いる簡易法と横断方向を水平とし、水路中心線のこう配を用いる厳密法について解析を行なった。その結果、いずれの場合も、彎曲部の曲率が小さいときには、主流流

速は外岸よりに増加し、従来の実験事実に対応する結果をうるとともに、曲率が大きいときには、内岸近くで流速分布に極小点があらわれるという興味深い予測が得られた。また、実験値と比較した結果、曲率の小さい彎曲部の後半では、完全発達域としての流速分布、水面形の式で近似できることが明らかになった。さらに、曲率の小さい場合、簡易法、厳密法による流速分布式の差違はわずかであつて、強制渦分布の式に比して実験値との対応もよく、流量条件によつても影響されないことが確認された。下層部の流れについては、上、下層の流速の接続条件を考慮し、連続の関係を重視した解析法と連続の関係、運動量式にもとづく解析法を示し、上層部の流れとの関連を明らかにした。

以上、要するに本研究では、開水路彎曲流の水理特性とくにその内部機構を統一的に論じ、従来かなり離散的に行なわれていたこの分野の研究に一つの方角を示した。自然河川における彎曲部の合理的な改修あるいは彎曲流の特性を有効に利用した人工水路の設計などの実用的な諸問題を裏づけるにはさらに彎曲部における流砂の挙動、複合彎曲部における水理特性などについて今後研究を進める必要があるが、こうした研究に対する一つの礎として本研究が役立つことを信じている。

最後に、本研究にあたり御指導、御鞭撻いただいた石原藤次郎教授、矢野勝正教授、岩佐義朗教授、芦田和男教授に深く謝意を表するとともに、実験に際して御助力いただいた元大学院学生・現建設省技官の石田真一君、井上喬之君に感謝する次第である。





